Institut für
Theoretische Physik
Universität zu Köln

Prof. Dr. C. Kiefer

1. Übungsblatt zur Vorlesung
Theoretische Physik I (Mechanik)
im Wintersemester 2006/07

Aufgabe 1: **Übungen zur Vektoranalysis** (13 Punkte)

Das total antisymmetrische Levi-Civita-Symbol ϵ_{ijk} ist in drei Dimensionen wie folgt definiert:

$$\epsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} 1 & \text{wenn } (i,j,k) \text{ gerade Permutationen von } (1,2,3) \\ -1 & \text{wenn } (i,j,k) \text{ ungerade Permutationen von } (1,2,3) \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases}$$

1. Beweisen Sie die folgenden wichtigen Identitäten:
   (a) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}\,(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}\,(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$
   (b) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A})$
2. Berechnen Sie folgende wichtige Ausdrücke für eine zweifach stetig differenzierbare Funktion $\phi\,(\mathbf{x})$ bzw. ein zweifach stetig differenzierbares Vektorfeld $\mathbf{A}\,(\mathbf{x})$:
   (a) $\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A})$
   (b) $\nabla\,(\nabla \times \mathbf{A})$
   (c) $\nabla \times (\nabla\phi)$
   (d) $\nabla\,(\phi\mathbf{A})$
3. Berechnen Sie ∇r sowie, für $r \neq 0$, $\nabla\left(\frac{1}{r}\right)$ and $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)$, wobei $r \equiv |\mathbf{x}|$ ist.
4. Für welche Funktionen $f\,(r)$ ist das Vektorfeld $\mathbf{A}\,(\mathbf{x}) = f(r)\mathbf{x}$ auf dem Gebiet $\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ quellenfrei?

Aufgabe 2: **Begleitendes Dreibein** (17 Punkte)

Für eine Kurve $\mathbf{x}(\sigma)$ im $\mathbb{R}^3$ lassen sich folgende Begriffe einführen (vgl. auch Physik I):

– Bogenlänge

$$s(\sigma, \sigma_0) \equiv \int_{\sigma_0}^{\sigma} \mathrm{d}\sigma' \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}(\sigma')}{\mathrm{d}\sigma'}\right)^2}$$

– Einheitstangente

$$\mathbf{t}(s) \equiv \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}(\sigma(s))}{ds} = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}\sigma}$$

– Einheitsnormale $\mathbf{n}$ und Krümmung κ

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{d}s} \equiv \kappa(s)\mathbf{n}(s),\ \kappa(s) \geq 0$$

– Einheitsnormale $\mathbf{b}$ und Torsion (Windung) τ

$$\mathbf{b}(s) \equiv \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$$

wobei

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}s} \equiv -\tau(s)\mathbf{n}(s)\ .$$

1. Zeigen Sie nun, daß

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}s} \equiv -\kappa(s)\mathbf{t}(s) + \tau\mathbf{b}(s)$$

   gilt. Dieser Zusammenhang wird als II. Frenetsche Formel bezeichnet.

2. Drücken Sie κ und τ durch $\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}\sigma}$, $\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}\sigma^2}$ und $\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{x}}{\mathrm{d}\sigma^3}$ aus.

3. Gegeben sei eine schraubenförmige Bahnkurve

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{e_1} r\cos(\omega t) + \mathbf{e_2} r\sin(\omega t) + \mathbf{e_3} kt\ .$$

   Berechnen Sie $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$, κ und τ für diese Bahn.

4. Zeigen Sie, daß $\tau = 0$ äquivalent ist zu der Aussage, daß die Kurve in einer Ebene verläuft.

Abgabe: Di, 24.10.2006