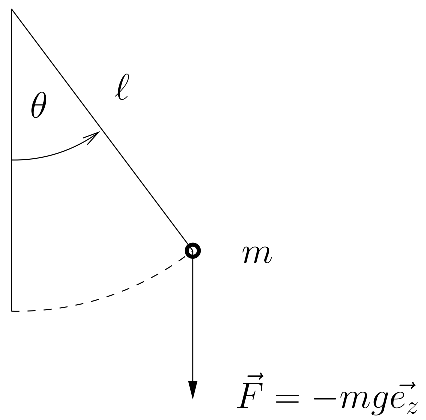
Institut für
Theoretische Physik
Universität zu Köln

Prof. Dr. C. Kiefer

3. Übungsblatt zur Vorlesung
Theoretische Physik I (Mechanik)
im Wintersemester 2006/07

Aufgabe 7: **Mathematisches Pendel** (20 Punkte)

Betrachten Sie das ebene mathematische Pendel im Schwerefeld.



a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für $\theta(t)$ auf.

b) Betrachten Sie den Fall kleiner Auslenkungen und linearisieren Sie die Bewegungsgleichung. Geben Sie die Lösung $\theta(t)$ sowie die Schwingungsdauer explizit an. Skizzieren Sie die Bewegung in der Phasenebene ($\dot{\theta}$–θ-Ebene)
für zwei Energiewerte E_1 und E_2, wobei $E_1 < E_2$ sein soll.

c) Betrachten Sie jetzt die allgemeine Bewegungsgleichung. Zeigen Sie, daß
$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{\ell}\cos\theta + \frac{2E}{m\ell^2} - \frac{2g}{\ell}$$
mit Gesamtenergie $E = mg\ell(1 - \cos\theta_0)$. Es sei $\theta(t_0) = \theta_0$, $\dot{\theta}(t_0) = 0$.

d) Es sei im folgenden $E < 2mg\ell$ (Bedeutung?) angenommen. Beweisen Sie weiter, daß die Schwingungsdauer durch das folgende Integral gegeben ist:
$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} ,$$
wobei $\sin\varphi = k^{-1}\sin\frac{\theta}{2}$ und $k \equiv \sin\frac{\theta_0}{2}$ ist.
Es handelt sich hierbei um ein elliptisches Integral erster Art, das nicht

analytisch berechnet werden kann. Gewinnen Sie aus der Entwicklung des Integranden die erste Korrektur zur in b) berechneten Schwingungsdauer der linearisierten Gleichung.

e) Betrachten Sie nun die allgemeine Bewegungsgleichung für den Spezialfall $\mathrm{E} = 2mg\ell$ (Bedeutung?). Berechnen Sie die Zeit für den Übergang des Pendels von θ ($< \theta_0$) nach $\theta = 0$.

Aufgabe 8: (10 Punkte)

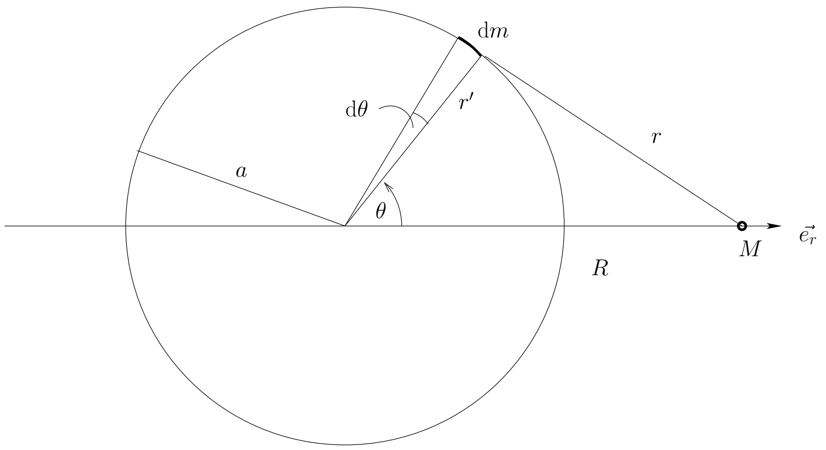
Ein Teilchen wird durch ein Loch genau durch den Erdmittelpunkt geworfen.

a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für das Teilchen auf. Berechnen Sie dazu das Potential, das durch eine Kugel mit Radius a für ein Teilchen der Masse M außerhalb der Kugel erzeugt wird. Denken Sie sich dazu die Kugel aus infinitesimalen Massestücken $\mathrm{d}m$ zusammengesetzt (siehe Skizze). Summieren Sie deren Potentiale. Das dabei auftretende Integral läßt sich unter Verwendung des Kosinussatzes lösen. Dieser erlaubt die Substitution

$$\sin\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{r \, \mathrm{d}r}{r' R} \, .$$

Die Dichte der Erde kann als homogen angenommen werden.

b) Wie groß ist die Periode der Oszillation?



Abgabe: Di, 7.11.2006