Institut für
Theoretische Physik
Universität zu Köln

Prof. Dr. C. Kiefer

9. Übungsblatt zur Vorlesung
Theoretische Physik I (Mechanik)
im Wintersemester 2006/07

Aufgabe 21: **Singuläre Lagrange-Funktionen** (10 Punkte)

Man nennt eine Lagrange-Funktion $L(q_i, \dot{q}_i, t)$, $i = 1, .., f$, singulär, falls

$$W := \det \mathrm{W}_{ij} := \det \left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right|$$

verschwindet.

a) Zeigen Sie, daß sich in diesem Fall die Lagrangeschen Gleichungen (zweiter Art) nicht nach den Beschleunigungen $\ddot{q}_i$ auflösen lassen.

b) Zeigen Sie, daß sich in diesem Fall die Gleichungen $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ nicht nach den Geschwindigkeiten auflösen lassen (der Hinweis auf einen einschlägigen Satz aus der Analysis genügt).

c) Nehmen Sie an, daß der Rang der Matrix W_{ij} gleich $R < f$ sei. Zeigen Sie, daß es dann $(f - R)$ 'Zwangsbedingungen' der Form $p_r = g_r(q, p_a)$ gibt, wobei $a = 1, .., R$, $r = R + 1, .., f$.

d) Betrachten Sie die Hamilton-Funktion

$$H(q, p_a, \dot{q}_r) = \sum_{i=1}^{f} p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t) \ ,$$

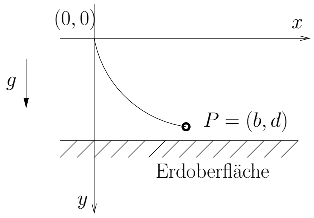
$a = 1, .., R$, $r = R + 1, .., f$, wobei für $i = R + 1, .., f$ die p_i durch $g_i(q, p_a)$ zu ersetzen und für $i = 1, .., R$ die $\dot{q}_i$ durch die p_i zu ersetzen sind.
Zeigen Sie, daß $\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_r} = 0$ gilt und geben Sie die (modifizierten) Hamiltonschen Bewegungsgleichungen an.

e) Betrachten Sie die Lagrange-Funktion

$$L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 q_2 + \frac{1}{2}(q_1 - q_2)^2 \ .$$

Zeigen Sie, daß L singulär ist. Wie lauten hier die Zwangsbedingungen $p_r = g_r(q, p_a)$? Berechnen Sie H.

Aufgabe 22: **Kurve kürzester Laufzeit** (20 Punkte)



Ein Teilchen soll oberhalb der Erdoberfläche unter dem alleinigen Einfluß der Schwerebeschleunigung g am raschesten von $(0,0)$ nach $P = (b,d)$, $d > 0$ gelangen. Dabei soll seine Anfangsgeschwindigkeit $v(0) = 0$ sein.

Auf welcher Kurve muß sich dazu das Teilchen bewegen?

a) Schreiben Sie die Bahnkurve als Funktion von x, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix}$.
Stellen Sie eine Formel für ein infinitesimales Bogenlängenelement $\mathrm{d}\ell$ der Kurve auf.

b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $v(y)$ des Teilchens mit Hilfe des Energiesatzes.

c) Verwenden Sie Ihre Ergebnisse aus a) und b), um eine Formel für die Gesamtlaufzeit T des Teilchens aufzustellen. Wie lautet die (verallgemeinerte) Lagrange-Funktion $L(y(x), y'(x))$ für dieses Problem?

d) Nutzen Sie die Tatsache, daß L nicht von x abhängt, um für $y(x)$ folgende Differentialgleichung zu erhalten

$$1 + y'^2 = \frac{C}{y} \ .$$

e) Benutzen Sie die Parameterdarstellung $(x(\sigma), y(\sigma))$, wobei

$$y(\sigma) = C\frac{(1 - \cos\sigma)}{2} \qquad 0 \leq \sigma \leq \pi \ ,$$

um eine Lösung $x(\sigma)$ zu erhalten. Skizzieren Sie die Lösungskurve.

Abgabe: Di, 19.12.2006