Universität zu Köln
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Claus Kiefer
Barbara Sandhöfer, Friedemann Queisser

29.01.2008

13. Übungsblatt zur Vorlesung
Allgemeine Relativitätstheorie und Kosmologie II
im Wintersemester 2007/08

Aufgabe 32: **Differentialformen** (12 Punkte)

a) Gegeben sei eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit einer Metrik. Sei $\{\omega^i\}$ eine Orthonormalbasis von 1-Formen, und sei ω die bevorzugte Volumenform $\omega = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \cdots \wedge \omega^n$. Zeigen Sie, daß in einem beliebigen Koordinatensystem $\{x^k\}$ gilt: $\omega = \sqrt{|g|}\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$, wobei g die Determinante der Metrik bezeichne, deren Komponenten g_{ij} in diesen Koordinaten gegeben sind.

b) Die Kontraktion einer p-Form ω (mit Komponenten $\omega_{ij\ldots k}$) mit einem Vektor v (mit Komponenten v^i) ist durch $[\omega(v)]_{j\ldots k} = \omega_{ij\ldots k}v^i$ gegeben. Betrachten Sie die n-Form $\omega = \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$. Zeigen Sie, daß mit einem Vektorfeld v gilt:

$$\mathrm{d}[\omega(v)] = v^i{}_{,i}\omega \; . \tag{1}$$

c) Wir definieren $(\mathrm{div}_\omega v)\omega := \mathrm{d}[\omega(v)]$. Zeigen Sie, daß in Koordinaten, in denen ω die Form hat: $\omega = f\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$, gilt:

$$\mathrm{div}_\omega v = \frac{1}{f}(fv^i)_{,i} \; . \tag{2}$$

d) Im dreidimensionalen Euklidischen Raum lautet die bevorzugte Volumenform $\omega = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$. Zeigen Sie, daß diese in Kugelkoordinaten $\omega = r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\phi$ lautet. Benutzen Sie das Ergebnis in c), um zu zeigen, daß die Divergenz eines Vektorfeldes

$$v = v^r \frac{\partial}{\partial r} + v^\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + v^\phi \frac{\partial}{\partial \phi} \tag{3}$$

durch

$$\mathrm{div} v = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v^r) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta v^\theta) + \frac{\partial v^\phi}{\partial\phi} \tag{4}$$

gegeben ist.

Aufgabe 33: **Maxwell-Gleichungen** (8 Punkte)

Durch die elektromagnetische Feldstärke F_{ij} und die Viererstromdichte $j^i = (\rho, \mathbf{j})$ seien die 2-Form

$$\begin{aligned} F = \frac{1}{2}F_{ij}\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j = {} & E^1\mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^1 + E^2\mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^2 + E^3\mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^3 \\ & -B^3\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 + B^2\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^3 - B^1\mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 \end{aligned} \tag{5}$$

sowie die 1-Form $j = j_i \mathrm{d}x^i$ definiert. Formulieren Sie die Maxwell-Gleichungen in der Sprache der Differentialformen und leiten Sie aus diesen die Gleichung für die Stromerhaltung her. Zeigen Sie weiter, daß die Feldstärke lokal durch eine Potentialform ausgedrückt werden kann. Wie lauten dann die Maxwell-Gleichungen?

Abgabe: Mi, 6.02.2008