

3. Übungsblatt zur Vorlesung  
**Allgemeine Relativitätstheorie und Kosmologie II**  
im Wintersemester 2007/08

Aufgabe 7: **Kerr-Newman-Metrik** (1+3+4+4+3 Punkte)

Die allgemeinste Lösung für ein stationäres Schwarzes Loch ist durch die Kerr-Newman-Metrik gegeben, welche ein Loch mit Drehimpuls  $J = M a$  und Ladung  $q$  beschreibt. Das Linienelement lautet in Boyer-Lindquist-Koordinaten

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2} (dt - a \sin^2 \theta d\phi)^2 - \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2)d\phi - a dt]^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 \quad (1)$$

mit

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2(\theta), \quad \Delta = r^2 - 2Mr + q^2 + a^2, \quad q^2 + a^2 \leq M^2. \quad (2)$$

- Zeigen Sie, dass dieses Linienelement aus dem Linienelement der Kerr-Metrik durch die Substitution  $M \rightarrow M - (q^2)/(2r)$  hervorgeht.
- Bei  $\Delta = 0$  liegen Koordinatensingularitäten vor. Bestimmen Sie deren Radialkoordinaten. Die Fläche  $r_+ = \text{const.}$  (mit  $r_+$  als dem größeren Wert der beiden) bildet den Ereignishorizont. Berechnen Sie dessen Oberfläche für  $t = \text{const.}$
- Analog zur Kerr-Metrik sei ein Beobachter mit  $r = \text{const.}$ ,  $\theta = \pi/2$  betrachtet, dessen Tangentialvektor parallel zu dem Killing-Feld  $\chi^a = \xi^a + \Omega \Psi^a$  ist. Welche Werte kann  $\Omega$  bei vorgegebenem  $r \geq r_+$  annehmen? Zeigen Sie, dass am Horizont nur ein Wert  $\Omega_H$  möglich ist und bestimmen Sie diesen.

- d) Wir betrachten nun das Killing-Feld  $\chi^a = \xi^a + \Omega\Psi^a$  ausgewertet am Ereignishorizont. Zeigen Sie, dass dieses auf dem gesamten Horizont lichtartig ist. Zeigen Sie weiter, dass die vermöge  $[\nabla^a(\chi_b\chi^b)]_H = -2\kappa\chi^a|_H$  definierte Oberflächengravitation  $\kappa$  eine wohldefinierte Größe ist. Berechnen Sie die Lie-Ableitung der Definitionsgleichung von  $\kappa$  bzgl.  $\chi^i$  und zeigen Sie so, dass  $\kappa$  entlang der Integralkurven von  $\chi$  konstant ist. (Nach einer etwas längeren Rechnung erhält man  $\kappa = (r_+ - M)/(r_+^2 + a^2)$ , was hier nicht gezeigt werden soll.)
- e) Betrachten Sie die am Horizont definierten Nullgeodätischen, deren Tangentialvektoren  $k^a$  proportional zu  $\chi^a$  sind. Finden Sie den funktionalen Zusammenhang zwischen dem affinen Parameter  $\lambda$  dieser Nullgeodätischen und dem Killing-Parameter  $v$  der Integralkurven von  $\chi^a$  (d.h.  $\chi^a = (\partial/\partial v)^a$ ).

**Aufgabe 8: Hawking-Temperatur** (5 Punkte)

In der Vorlesung ist angegeben worden, dass ein Schwarzschildsches Schwarzes Loch mit der Hawking-Temperatur  $T_H = (\hbar c^3)/(8\pi k_B GM)$  strahlt. Nehmen Sie an, dass nur Photonen mit einem perfekten Planck-Spektrum abgestrahlt werden. Finden Sie den Zusammenhang zwischen der Anfangsmasse des Schwarzen Lochs und seiner Lebenszeit und untersuchen Sie diesen für einige interessante Zeiten und Massen.

Abgabe: Mi, 14.11.2007