Universität zu Köln
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Claus Kiefer
Barbara Sandhöfer, Friedemann Queisser

6.11.2007

3. Übungsblatt zur Vorlesung
Allgemeine Relativitätstheorie und Kosmologie II
im Wintersemester 2007/08

Aufgabe 7: **Kerr-Newman-Metrik** (1+3+4+4+3 Punkte)

Die allgemeinste Lösung für ein stationäres Schwarzes Loch ist durch die Kerr-Newman-Metrik gegeben, welche ein Loch mit Drehimpuls $J = M\,a$ und Ladung q beschreibt. Das Linienelement lautet in Boyer-Lindquist-Koordinaten

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 =& \frac{\Delta}{\rho^2}(\mathrm{d}t - a\sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi)^2 \\ &- \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left[(r^2+a^2)\mathrm{d}\phi - a\,\mathrm{d}t\right]^2 - \frac{\rho^2}{\Delta}\mathrm{d}r^2 - \rho^2\mathrm{d}\theta^2 \end{aligned} \tag{1}$$

mit

$$\rho^2 = r^2 + a^2\cos(\theta)^2, \quad \Delta = r^2 - 2Mr + q^2 + a^2, \quad q^2 + a^2 \leq M^2\,. \tag{2}$$

a) Zeigen Sie, dass dieses Linienelement aus dem Linienelement der Kerr-Metrik durch die Substitution $M \to M - (q^2)/(2r)$ hervorgeht.

b) Bei $\Delta = 0$ liegen Koordinatensingularitäten vor. Bestimmen Sie deren Radialkoordinaten. Die Fläche $r_+ = \text{const.}$ (mit r_+ als dem größeren Wert der beiden) bildet den Ereignishorizont. Berechnen Sie dessen Oberfläche für $t = \text{const.}$

c) Analog zur Kerr-Metrik sei ein Beobachter mit $r = const.$, $\theta = \pi/2$ betrachtet, dessen Tangentialvektor parallel zu dem Killing-Feld $\chi^a = \xi^a + \Omega\Psi^a$ ist. Welche Werte kann Ω bei vorgegebenem $r \geq r_+$ annehmen? Zeigen Sie, dass am Horizont nur ein Wert Ω_H möglich ist und bestimmen Sie diesen.

d) Wir betrachten nun das Killing-Feld $\chi^a = \xi^a + \Omega\Psi^a$ ausgewertet am Ereignishorizont. Zeigen Sie, dass dieses auf dem gesamten Horizont lichtartig ist. Zeigen Sie weiter, dass die vermöge $\left[\nabla^a(\chi_b\chi^b)\right]_H = -2\kappa\, \chi^a|_H$ definierte Oberflächengravitation κ eine wohldefinierte Größe ist. Berechnen Sie die Lie-Ableitung der Definitionsgleichung von κ bzgl. χ^i und zeigen Sie so, dass κ entlang der Integralkurven von χ konstant ist. (Nach einer etwas längeren Rechnung erhält man $\kappa = (r_+ - M)/(r_+^2 + a^2)$, was hier nicht gezeigt werden soll.)

e) Betrachten Sie die am Horizont definierten Nullgeodätischen, deren Tangentialvektoren k^a proportional zu χ^a sind. Finden Sie den funktionalen Zusammenhang zwischen dem affinen Parameter λ dieser Nullgeodätischen und dem Killing-Parameter v der Integralkurven von χ^a (d.h. $\chi^a = (\partial/\partial v)^a$).

Aufgabe 8: **Hawking-Temperatur** (5 Punkte)

In der Vorlesung ist angegeben worden, dass ein Schwarzschildsches Schwarzes Loch mit der Hawking-Temperatur $T_\mathrm{H} = (\hbar c^3)/(8\pi k_\mathrm{B} GM)$ strahlt. Nehmen Sie an, dass nur Photonen mit einem perfekten Planck-Spektrum abgestrahlt werden. Finden Sie den Zusammenhang zwischen der Anfangsmasse des Schwarzen Lochs und seiner Lebenszeit und untersuchen Sie diesen für einige interessante Zeiten und Massen.

Abgabe: Mi, 14.11.2007