

5. Übungsblatt zur Vorlesung  
**Allgemeine Relativitätstheorie und Kosmologie II**  
im Wintersemester 2007/08

Aufgabe 12: **Friedmann I** (6 Punkte)

Betrachten Sie ein Friedmann-Modell mit  $k \neq 0$  und (heutigen) Dichteparametern  $\Omega_{m,0}$ ,  $\Omega_{r,0}$  und  $\Omega_{v,0}$  sowie  $\Omega := \Omega_{m,0} + \Omega_{r,0} + \Omega_{v,0}$ . Ferner seien  $\rho_c(a) = 3\dot{a}^2/(8\pi G a^2)$  die kritische Dichte zu einem Zeitpunkt, an dem der Skalenparameter den Wert  $a$  hatte, und  $\Omega_m(a) = \rho_m(a)/\rho_c(a)$  u.s.w. die zugehörigen relativen Dichten. Bestimmen Sie die Größe  $\Omega(a) - 1$ , die angibt, wie weit das betrachtete Modell zu einem bestimmten Zeitpunkt von einem flachen Modell „entfernt“ war, als Funktion von  $\Omega_{m,0}$ ,  $\Omega_{r,0}$ ,  $\Omega_{v,0}$  und  $a$ . Welches „ästhetische Problem“ ergibt sich hieraus für ein Friedmann-Modell, dessen  $\Omega$  heute nur wenig vom Wert Eins abweicht?

Aufgabe 13: **Friedmann II** (8 Punkte)

Lösen Sie die Friedmann-Gleichung für ein Universum, in dem sowohl Strahlung als auch nichtrelativistische Materie (Staub) vorhanden sind. Anleitung: Schreiben Sie die Friedmann-Gleichung zunächst um in eine Differentialgleichung bezüglich der konformen Zeit  $\eta$ , lösen Sie diese für die drei möglichen Werte von  $k$  und geben Sie das Ergebnis in der Form  $(a(\eta), t(\eta))$  an. Zeigen Sie weiter, wie man das Resultat für  $k = 0$  aus den Ergebnissen für  $k \neq 0$  erhalten kann und untersuchen Sie schließlich die (implizit definierten) Funktionen  $a(t)$  für große und kleine Werte von  $t$ .

Aufgabe 14: **Friedmann III**

(6 Punkte)

Aktuelle Beobachtungen legen nahe, daß wir in einem flachen ( $k = 0$ ) Universum mit positiver kosmologischer Konstante leben, in dem der Beitrag der Strahlung zur Gesamtenergiedichte vernachlässigt werden kann. Lösen Sie für dieses Modell die Friedmann-Gleichung. Tip: Die Substitution  $x^2 = (1/\Omega_{m,0} - 1)a^3$  könnte sich als nützlich erweisen. Bestimmen Sie das Weltalter als Funktion von  $H_0$  und  $\Omega_{m,0}$ . Wie verhält sich  $a(t)$  für große und kleine Werte von  $t$ ? Gut etablierten Sternentwicklungsmodellen zufolge sind einige Kugelsternhaufen unserer Galaxis mindestens 12 Milliarden Jahre alt. Plotten Sie in der  $h - \Omega_m$ -Ebene ( $h$  ist der Parameter in  $H_0$ ) die Konturlinien für ein konstantes Weltalter und bestimmen Sie, welcher Bereich mit der obigen Beobachtung verträglich ist. Beschränken Sie sich dabei auf Werte  $0,4 < h < 1$ .

Abgabe: Mi, 28.11.2007