Universität zu Köln
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Claus Kiefer
Barbara Sandhöfer, Friedemann Queisser

28.11.2007

6. Übungsblatt zur Vorlesung
Allgemeine Relativitätstheorie und Kosmologie II
im Wintersemester 2007/08

Aufgabe 15: **Ideale Flüssigkeiten in der Kosmologie**
(4+6+4+4 Punkte)

Betrachten Sie eine ideale Flüssigkeit in einem Friedmann-Lemaître-Modell.

a) Zeigen Sie, dass sich mitbewegte Beobachter auf Geodätischen bewegen.

b) Werten Sie für solche Beobachter die kovariante Erhaltung des Energie-Impuls-Tensors der idealen Flüssigleit aus und zeigen Sie, dass diese nur *eine* nichttriviale Gleichung liefert, die ihrerseits auch aus den Friedmann-Gleichungen gefolgert werden kann.

c) Betrachten Sie eine Zustandsgleichung der Form $p = w\rho$ mit $w =$const. Berechnen Sie die Funktion $\rho(a)$. Für welche Werte von w ist $\ddot{a} > 0$? Wann ist die starke Energiebedingung erfüllt? Berechnen Sie $\rho(a)$ für ein sogenanntes "Chapylygin-Gas", welches der Zustandsgleichung $p = -A/\rho$ ($A = const. > 0$) genügt und diskutieren Sie die Grenzfälle $a \to 0$ und $a \to \infty$.

d) Betrachten Sie ein flaches Friedmann-Universum, das $\Omega_m + \Omega_x = 1$ erfüllt, wobei sich Ω_m wie in der Vorlesung auf drucklose Materie bezieht und $\Omega_x = \rho_x/\rho_c$ für eine hypothetische Energieform mit Dichte ρ_x und Zustandsgleichung $p_x = w_x\rho_x$ steht. Welcher Bedingung muss w_x in Abhängigkeit von Ω_m genügen, damit die Expansion beschleunigt ist? Berechnen Sie den Hubble-Parameter als Funktion der Rotverschiebung, $H(z)$.

Aufgabe 16: (2 Punkte)

Beobachtungen legen nahe, dass für das heutige Universum $\Omega_{m,0} \approx 0.3$ und $\Omega_v \approx 0.7$ ist. Bei welcher Rotverschiebung war die Energiedichte der Materie gleich der des Vakuums?

Abgabe: Mi, 5.12.2007