

7. Übungsblatt zur Vorlesung
Allgemeine Relativitätstheorie und Kosmologie II
im Wintersemester 2007/08

Aufgabe 17: Galaxien (8 Punkte)

Ein (als punktförmig angenommener) Quasar in einem materiedominierten Friedmann-Universum ($\Omega_{r,0} = 0$, $\Omega_{v,0} = 0$, $\Omega_{m,0} = \Omega_0$ und $k \in \{0, \pm 1\}$) habe eine Rotverschiebung z_Q . Finden Sie eine Formel für die erwartete Anzahl N von Galaxien, die ein Lichtstrahl auf seinem Weg vom Quasar zu einem irdischen Beobachter durchquert. Nehmen Sie hierzu an, dass die Galaxien gleichmäßig verteilt sind und heute eine Anzahldichte n_0 haben; der mittlere Querschnitt einer Galaxie sei σ . Beachten Sie dabei, dass die kosmologische Dynamik gegenüber der Eigendynamik innerhalb einer Galaxie vernachlässigt werden kann, und die einzelnen Galaxien somit von der kosmischen Expansion entkoppelt sind. Anleitung: Erklären und verwenden Sie den Ansatz

$$dN = n_0 (1+z)^3 \sigma \frac{a}{\sqrt{1-kr^2}} dr . \quad (1)$$

Benutzen Sie in der weiteren Ableitung die Beziehung

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 (1+z)^2 (1 + \Omega_0 z) , \quad (2)$$

die Sie hier beweisen.

Aufgabe 18: Dunkle Energie (12 Punkte)

Neuere Entwicklungen versuchen, eine Kosmologische Konstante durch ein homogenes Skalarfeld ϕ mit einem geeigneten Potential $V(\phi)$ zu simulieren. Betrachten Sie dafür die Wirkung

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi - V(\phi) \right) . \quad (3)$$

- a) Leiten Sie die Bewegungsgleichung für ein homogenes Feld $\phi(t)$ in einem Friedmann-Universum ab.
- b) Berechnen Sie durch Variation bezüglich der Metrik den Energie-Impuls-Tensor des Skalarfeldes. Spezialisieren Sie auf ein homogenes Feld im Friedmann-Universum und identifizieren Sie dessen Energie-Impuls-Tensor mit dem einer idealen Flüssigkeit. Bestimmen Sie so die Energiedichte ρ_ϕ und den Druck p_ϕ . Für welche Idealisierung wird durch ϕ eine Kosmologische Konstante beschrieben?
- c) In einem konkreten Modell betrachtet man das Potential $V(\phi) = \kappa/\phi^\alpha$ mit zunächst frei wählbaren Parametern κ und α . Betrachten Sie für den Skalenfaktor die zeitliche Entwicklung $a(t) \propto t^n$ ($k = 0$ -Universum; $n = 2/3$ bei Materiedominanz, $n = 1/2$ bei Strahlungsdominanz). Suchen Sie nach einer Lösung für ϕ von der Form $\phi(t) \propto t^A$: Was folgt für A , und welche Beziehung muss dazu zwischen κ und α gelten? Berechnen Sie schließlich die Energiedichte ρ_ϕ und vergleichen Sie diese mit der Dichte ρ der Materie (bzw. der Strahlung).

Abgabe: Mi, 12.12.2007