Universität zu Köln
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Claus Kiefer
Friedemann Queisser

20.1.2009

12. Übungsblatt zur Quantenmechanik II

Wintersemester 2008/09

Aufgabe 28 (Foldy-Wouthuysen-Transformation) (8 Punkte)

a) Verifizieren Sie die in der Vorlesung angegebenen Ausdrücke für

$$\frac{i}{2}[S,[S,H]], \quad \frac{i^3}{6}[S,[S,[S,H]]], \quad \frac{1}{24}[S,[S,[S,[S,H]]]]$$

mit $H = \vec{\alpha}(\vec{p} - e\vec{A}) + \beta m + e\Phi$ und $S = -\frac{i}{2m}\beta\mathcal{O}$, wobei $\mathcal{O} = \vec{\alpha}(\vec{p} - e\vec{A})$.

b) Zeigen Sie, dass sich die Klein-Gordon-Gleichung

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = (\nabla^2 - m^2)\varphi$$

mit Hilfe der Substitutionen

$$\vartheta = \frac{1}{2}\left(\varphi + \frac{i}{m}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) \quad \text{und} \quad \chi = \frac{1}{2}\left(\varphi - \frac{i}{m}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)$$

in eine Matrixgleichung

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t} = H_0\Phi$$

überführen lässt, wobei $\Phi = \begin{pmatrix}\vartheta\\ \chi\end{pmatrix}$ und $H_0 = -\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\frac{\nabla^2}{2m} + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} m$ ist.

c) Unter Verwendung der minimalen Kopplung ($p \rightarrow \pi = p - eA$) ergibt sich die Klein-Gordon-Gleichung in Zweikomponenten-Formulierung für Teilchen im elektromagnetischen Feld

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \left\{-\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\frac{\vec{\pi}^2}{2m} + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} m + eV(x)\right\}\Phi(x)\,.$$

Aufgabe 29 (Zusammenfassung) (2 Punkte)

Fassen Sie in einem kurzen Essay (maximal fünf Seiten) die bisher wichtigsten Ergebnisse der Vorlesung zusammen.

Abgabe: Mi, 28.1.09