Universität zu Köln
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Claus Kiefer
Friedemann Queisser

17.11.2009

5. Übungsblatt zur Vorlesung
Allgemeine Relativitätstheorie und Kosmologie II
im Wintersemester 2009/10

Aufgabe 12: **Friedmann I** (6 Punkte)

Betrachten Sie ein Friedmann-Modell mit $k \neq 0$ und (heutigen) Dichteparametern $\Omega_{m,0}$, $\Omega_{r,0}$ und $\Omega_{v,0}$ sowie $\Omega := \Omega_{m,0} + \Omega_{r,0} + \Omega_{v,0}$. Ferner seien $\rho_c(a) = 3\dot{a}^2/(8\pi G a^2)$ die kritische Dichte zu einem Zeitpunkt, an dem der Skalenparameter den Wert a hatte, und $\Omega_m(a) = \rho_m(a)/\rho_c(a)$ u.s.w. die zugehörigen relativen Dichten. Bestimmen Sie die Größe $\Omega(a) - 1$, die angibt, wie weit das betrachtete Modell zu einem bestimmten Zeitpunkt von einem flachen Modell ,,entfernt" war, als Funktion von $\Omega_{m,0}$, $\Omega_{r,0}$, $\Omega_{v,0}$ und a. Welches ,,ästhetische Problem" ergibt sich hieraus für ein Friedmann-Modell, dessen Ω heute nur wenig vom Wert Eins abweicht?

Aufgabe 13: **Friedmann II** (8 Punkte)

Lösen Sie die Friedmann-Gleichung für ein Universum, in dem sowohl Strahlung als auch nichtrelativistische Materie (Staub) vorhanden sind. Anleitung: Schreiben Sie die Friedmann-Gleichung zunächst um in eine Differentialgleichung bezüglich der konformen Zeit η, lösen Sie diese für die drei möglichen Werte von k und geben Sie das Ergebnis in der Form $(a(\eta), t(\eta))$ an. Zeigen Sie weiter, wie man das Resultat für $k = 0$ aus den Ergebnissen für $k \neq 0$ erhalten kann und untersuchen Sie schließlich die (implizit definierten) Funktionen $a(t)$ für große und kleine Werte von t.

Aufgabe 14: **Friedmann III** (6 Punkte)

Aktuelle Beobachtungen legen nahe, daß wir in einem flachen ($k = 0$) Universum mit positiver kosmologischer Konstante leben, in dem der Beitrag der Strahlung zur Gesamtenergiedichte vernachlässigt werden kann. Lösen Sie für dieses Modell die Friedmann-Gleichung. Tip: Die Substitution $x^2 = (1/\Omega_{m,0} - 1)a^3$ könnte sich als nützlich erweisen. Bestimmen Sie das Weltalter als Funktion von H_0 und $\Omega_{m,0}$. Wie verhält sich $a(t)$ für große und kleine Werte von t? Gut etablierten Sternentwicklungsmodellen zufolge sind einige Kugelsternhaufen unserer Galaxis mindestens 12 Milliarden Jahre alt. Plotten Sie in der $h - \Omega_m$-Ebene (h ist der Parameter in H_0) die Konturlinien für ein konstantes Weltalter und bestimmen Sie, welcher Bereich mit der obigen Beobachtung verträglich ist. Beschränken Sie sich dabei auf Werte $0,4 < h < 1$.

Abgabe: Mi, 25.11.2009