Universität zu Köln
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Claus Kiefer
Friedemann Queisser

1.12.2009

7. Übungsblatt zur Vorlesung **Allgemeine Relativitätstheorie und Kosmologie II** im Wintersemester 2009/10

Aufgabe 17: **Galaxien** (8 Punkte)

Ein (als punktförmig angenommener) Quasar in einem materiedominierten Friedmann-Universum ($\Omega_{r,0} = 0$, $\Omega_{v,0} = 0$, $\Omega_{m,0} = \Omega_0$ und $k \in \{0, \pm 1\}$) habe eine Rotverschiebung z_Q. Finden Sie eine Formel für die erwartete Anzahl N von Galaxien, die ein Lichtstrahl auf seinem Weg vom Quasar zu einem irdischen Beobachter durchquert. Nehmen Sie hierzu an, dass die Galaxien gleichmäßig verteilt sind und heute eine Anzahldichte n_0 haben; der mittlere Querschnitt einer Galaxie sei σ. Beachten Sie dabei, dass die kosmologische Dynamik gegenüber der Eigendynamik innerhalb einer Galaxie vernachlässigt werden kann, und die einzelnen Galaxien somit von der kosmischen Expansion entkoppelt sind. Anleitung: Erklären und verwenden Sie den Ansatz

$$dN = n_0 \,(1+z)^3 \,\sigma \,\frac{a}{\sqrt{1-kr^2}} dr \;. \tag{1}$$

Benutzen Sie in der weiteren Ableitung die Beziehung

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \,(1+z)^2 \,(1+\Omega_0 z) \;, \tag{2}$$

die Sie hier beweisen.

Aufgabe 18: **Dunkle Energie** (12 Punkte)

Neuere Entwicklungen versuchen, eine Kosmologische Konstante durch ein homogenes Skalarfeld ϕ mit einem geeigneten Potential $V(\phi)$ zu simulieren. Betrachten Sie dafür die Wirkung

$$S = \int \mathrm{d}^4x \,\sqrt{-g}\, \left(\frac{1}{2} g^{ab}\partial_a\phi\partial_b\phi - V(\phi)\right) \;. \tag{3}$$

a) Leiten Sie die Bewegungsgleichung für ein homogenes Feld $\phi(t)$ in einem Friedmann-Universum ab.

b) Berechnen Sie durch Variation bezüglich der Metrik den Energie-Impuls-Tensor des Skalarfeldes. Spezialisieren Sie auf ein homogenes Feld im Friedmann-Universum und identifizieren Sie dessen Energie-Impuls-Tensor mit dem einer idealen Flüssigkeit. Bestimmen Sie so die Energiedichte ρ_ϕ und den Druck p_ϕ. Für welche Idealisierung wird durch ϕ eine Kosmologische Konstante beschrieben?

c) In einem konkreten Modell betrachtet man das Potential $V(\phi) = \kappa/\phi^\alpha$ mit zunächst frei wählbaren Parametern κ und α. Betrachten Sie für den Skalenfaktor die zeitliche Entwicklung $a(t) \propto t^n$ ($k = 0$-Universum; $n = 2/3$ bei Materiedominanz, $n = 1/2$ bei Strahlungsdominanz). Suchen Sie nach einer Lösung für ϕ von der Form $\phi(t) \propto t^A$: Was folgt für A, und welche Beziehung muss dazu zwischen κ und α gelten? Berechnen Sie schließlich die Energiedichte ρ_ϕ und vergleichen Sie diese mit der Dichte ρ der Materie (bzw. der Strahlung).

Abgabe: Mi, 9.12.2009