Universität zu Köln 4.12.2007
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Claus Kiefer
Barbara Sandhöfer, Friedemann Queisser

# 7. Übungsblatt zur Vorlesung **Allgemeine Relativitätstheorie und Kosmologie II** im Wintersemester 2007/08

## Aufgabe 17: **Galaxien** (8 Punkte)

Ein (als punktförmig angenommener) Quasar in einem materiedominierten Friedmann-Universum ($\Omega_{r,0} = 0$, $\Omega_{v,0} = 0$, $\Omega_{m,0} = \Omega_0$ und $k \in \{0, \pm 1\}$) habe eine Rotverschiebung $z_Q$. Finden Sie eine Formel für die erwartete Anzahl $N$ von Galaxien, die ein Lichtstrahl auf seinem Weg vom Quasar zu einem irdischen Beobachter durchquert. Nehmen Sie hierzu an, dass die Galaxien gleichmäßig verteilt sind und heute eine Anzahldichte $n_0$ haben; der mittlere Querschnitt einer Galaxie sei $\sigma$. Beachten Sie dabei, dass die kosmologische Dynamik gegenüber der Eigendynamik innerhalb einer Galaxie vernachlässigt werden kann, und die einzelnen Galaxien somit von der kosmischen Expansion entkoppelt sind. Anleitung: Erklären und verwenden Sie den Ansatz

$$dN = n_0 \, (1+z)^3 \, \sigma \, \frac{a}{\sqrt{1-kr^2}} dr \; . \tag{1}$$

Benutzen Sie in der weiteren Ableitung die Beziehung

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \, (1+z)^2 \, (1+\Omega_0 z) \; , \tag{2}$$

die Sie hier beweisen.

## Aufgabe 18: **Dunkle Energie** (12 Punkte)

Neuere Entwicklungen versuchen, eine Kosmologische Konstante durch ein homogenes Skalarfeld $\phi$ mit einem geeigneten Potential $V(\phi)$ zu simulieren. Betrachten Sie dafür die Wirkung

$$S = \int \mathrm{d}^4 x \, \sqrt{-g} \, \left(\frac{1}{2} g^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi - V(\phi)\right) \; . \tag{3}$$

a) Leiten Sie die Bewegungsgleichung für ein homogenes Feld $\phi(t)$ in einem Friedmann-Universum ab.

b) Berechnen Sie durch Variation bezüglich der Metrik den Energie-Impuls-Tensor des Skalarfeldes. Spezialisieren Sie auf ein homogenes Feld im Friedmann-Universum und identifizieren Sie dessen Energie-Impuls-Tensor mit dem einer idealen Flüssigkeit. Bestimmen Sie so die Energiedichte $\rho_\phi$ und den Druck $p_\phi$. Für welche Idealisierung wird durch $\phi$ eine Kosmologische Konstante beschrieben?

c) In einem konkreten Modell betrachtet man das Potential $V(\phi) = \kappa/\phi^\alpha$ mit zunächst frei wählbaren Parametern $\kappa$ und $\alpha$. Betrachten Sie für den Skalenfaktor die zeitliche Entwicklung $a(t) \propto t^n$ ($k = 0$-Universum; $n = 2/3$ bei Materiedominanz, $n = 1/2$ bei Strahlungsdominanz). Suchen Sie nach einer Lösung für $\phi$ von der Form $\phi(t) \propto t^A$: Was folgt für $A$, und welche Beziehung muss dazu zwischen $\kappa$ und $\alpha$ gelten? Berechnen Sie schließlich die Energiedichte $\rho_\phi$ und vergleichen Sie diese mit der Dichte $\rho$ der Materie (bzw. der Strahlung).

Abgabe: Mi, 12.12.2007