Universität zu Köln
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Claus Kiefer
Manuel Krämer

11. April 2012

www.thp.uni-koeln.de/gravitation/courses/qm12.html

1. Übungsblatt zur Quantenphysik

Sommersemester 2012

Abgabe: bis Mittwoch, 18. April 2012, 12:00 Uhr in der Holzbox vor dem Institut für Theoretische Physik

Übung 1 (16 Punkte): *Freie Schrödinger-Gleichung*

Die Schrödinger-Gleichung für die Wellenfunktion ψ eines freien Teilchens mit Masse m in einer Dimension in Ort x und Zeit t ist gegeben durch

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial t}\,\psi(x,t) + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\psi(x,t) = 0\,. \tag{1}$$

1.1 Benutzen Sie den Separationsansatz $\psi(x,t) = \phi(x)\,\chi(t)$, um (1) in zwei Eigenwertprobleme in x bzw. t zu überführen und lösen Sie diese.

1.2 Welche Forderung muss an die Eigenwerte gestellt werden, damit die Lösungen von (1) mit der Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Wellenfunktion kompatibel sind?

Die Spektralfunktion $\widetilde{\Phi}(k)$ in Abhängigkeit von der Wellenzahl k sei durch folgende Fourier-Transformation definiert:

$$\widetilde{\Phi}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\;\psi(x,t=0)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,.$$

Hiermit kann die allgemeine Lösung für die Wellenfunktion $\psi(x,t)$ folgendermaßen geschrieben werden:

$$\psi(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\;\widetilde{\Phi}(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega(k)t)}\,.$$

1.3 Wie hängt k mit den Eigenwerten aus **1.1** zusammen? Wie lautet die Dispersionsrelation $\omega(k)$?

1.4 Zeigen Sie mit Hilfe einer Taylorentwicklung von $\omega(k)$ um eine Wellenzahl k_0, dass $\psi(x,t)$ in einen Phasenfaktor $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0x-\omega(k_0)t)}$ und einen Amplitudenfaktor $\mathcal{A}$ zerlegt werden kann:

$$\psi(x,t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0x-\omega(k_0)t)}\,\mathcal{A}\big(x-\omega'(k_0)t,\,\omega''(k_0)t\big)\,,$$

wobei

$$\omega'(k_0) = \left.\frac{\mathrm{d}\omega(k)}{\mathrm{d}k}\right|_{k=k_0} \quad \text{und} \quad \omega''(k_0) = \left.\frac{\mathrm{d}^2\omega(k)}{\mathrm{d}k^2}\right|_{k=k_0}.$$

1.5 Berechnen Sie den Amplitudenfaktor $\mathcal{A}$ explizit für die Spektralfunktion

$$\widetilde{\Phi}(k) = \mathcal{N}\,\mathrm{e}^{-\frac{(k-k_0)^2}{2a^2}}\,, \quad \text{wobei} \quad [a] = [\text{Länge}]^{-1}\,.$$

Hinweis: $\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\;\mathrm{e}^{-\lambda x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$ für $\mathfrak{Re}(\lambda) > 0$.

1.6 Bestimmen Sie den Normierungsfaktor $\mathcal{N}$, sodass

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k\left|\widetilde{\Phi}(k)\right|^2 = 1\,,$$

und zeigen Sie, dass hiermit für alle Zeiten t gilt:

$$(\psi,\psi) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\;\psi^*(x,t)\,\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,|\psi(x,t)|^2 = 1\,.$$

Bitte wenden.

1.7 Berechnen Sie den Ortserwartungswert

$$\langle x \rangle := (\psi, x\,\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; \psi^*(x,t)\, x\, \psi(x,t)$$

und die Breite $\sigma^2(t)$ der Verteilung, die gegeben ist durch

$$\sigma^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = (\psi, x^2\,\psi) - (\psi, x\,\psi)^2 \,.$$

Wie entwickelt sich die Breite mit der Zeit?
Schätzen Sie ab, nach welcher Zeit t sich die Breite verdoppelt hat ($a \approx 10^3\,\mathrm{m}^{-1}$, $m \approx 10^{-6}\,\mathrm{kg}$).
Warum bezeichnet man $\omega'(k_0)$ als Gruppengeschwindigkeit?

Hinweis: $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\; x^2\, \mathrm{e}^{-\lambda x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, \lambda^{-3/2}$ für $\mathfrak{Re}(\lambda) > 0$.

Übung 2 (4 Punkte): *Begründung der Schrödinger-Gleichung*

Fassen Sie in eigenen Worten kurz (maximal eine Seite) zusammen, durch welche heuristischen Überlegungen sich die Schrödinger-Gleichung begründen lässt.

Historische Zitate zur Entwicklung der Quantenmechanik

Wir betrachten aber — und dies ist der wesentlichste Punkt der ganzen Berechnung — E als zusammengesetzt aus einer ganz bestimmten Anzahl endlicher gleicher Teile und bedienen uns dazu der Naturconstanten $h = 6{,}55 \,.\, 10^{-27}$ [erg × sec]. Diese Constante mit der gemeinsamen Schwingungszahl ν der Resonatoren multiplicirt ergiebt das Energieelement ε in erg, und durch Division von E durch ε erhalten wir die Anzahl P der Energieelemente, welche unter die N Resonatoren zu verteilen sind.

aus: Max Planck, Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspectrum,
Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft 2, Nr. 17, S. 237–245, 1900.
(vorgetragen am 14. Dezember 1900)

Es scheint mir nun in der Tat, daß die Beobachtungen über die „schwarze Strahlung“, Photolumineszenz, die Erzeugung von Kathodenstrahlen durch ultraviolettes Licht und andere die Erzeugung bez. Verwandlung des Lichtes betreffende Erscheinungsgruppen besser verständlich erscheinen unter der Annahme, daß die Energie des Lichtes diskontinuierlich im Raume verteilt sei. Nach der hier ins Auge zu fassenden Annahme ist bei Ausbreitung eines von einem Punkte ausgehenden Lichtstrahles die Energie nicht kontinuierlich auf größer und größer werdende Räume verteilt, sondern es besteht dieselbe aus einer endlichen Zahl von in Raumpunkten lokalisierten Energiequanten, welche sich bewegen, ohne sich zu teilen und nur als Ganze absorbiert und erzeugt werden können.

aus: Albert Einstein, Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden
heuristischen Gesichtspunkt, *Annalen der Physik*, Band 17, S. 132–148, 1905.