Universität zu Köln
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Claus Kiefer
Manuel Krämer

18. April 2012

www.thp.uni-koeln.de/gravitation/courses/qm12.html

2. Übungsblatt zur Quantenphysik

Sommersemester 2012

Abgabe: bis Mittwoch, 25. April 2012, 12:00 Uhr in der Holzbox vor dem Institut für Theoretische Physik

Übung 3 (10 Punkte): *Dirac'sche δ-Distribution*

Eine glatte (d.h. beliebig oft differenzierbare) Funktion $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt *Schwartzfunktion*, wenn sie selbst und alle ihre Ableitungen im Limes $|x| \to \infty$ schneller als jedes Polynom zu 0 abfallen, d.h.

$$\lim_{|x|\to\infty} x^\alpha \, \phi^{(n)}(x) = 0 \quad \text{für alle} \quad \alpha, n \in \mathbb{N}\,.$$

Als *Testfunktion* wird eine Schwartzfunktion mit kompaktem Träger bezeichnet. Eine *Distribution F*, welche eine Testfunktion $\phi(x)$ auf $\mathbb{C}$ abbildet, sei durch

$$F[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; f(x)\, \phi(x) \tag{1}$$

definiert, ihre Ableitung durch $F'[\phi] = -F[\phi']$.

3.1 Setzen Sie in Gleichung (1)

$$f(x) := \theta(x-a) = \begin{cases} 0 & \text{für } \; x < a \\ 1 & \text{für } \; x \geq a \end{cases} \qquad \text{(Heaviside-Stufenfunktion)}$$

und definieren Sie die dazugehörige Distribution $\Theta_a[\phi]$. Berechnen Sie die Ableitung $\Theta'_a[\phi]$ und zeigen Sie, dass diese der *δ-Distribution* $\hat{\delta}_a[\phi]$ entspricht, welche definiert ist durch

$$\hat{\delta}_a[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; \delta(x-a)\, \phi(x) = \phi(a)\,,$$

wobei $\delta(x-a)$ häufig salopp als „*δ-Funktion*" bezeichnet wird.

3.2 Die „δ-Funktion" lässt sich als Limes glatter Funktionen darstellen. Benutzen Sie

$$\vartheta_\varepsilon(x-a) := \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-\frac{x-a}{\varepsilon}}}\,.$$

Skizzieren Sie $\vartheta_\varepsilon(x-a)$. Bestätigen Sie dann, dass $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \vartheta'_\varepsilon(x-a) = \delta(x-a)$, indem Sie unter Verwendung einer geeigneten Substitution zeigen, dass

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; \vartheta'_\varepsilon(x-a)\, \phi(x) = \phi(a)\,.$$

3.3 Zeigen Sie, dass die Fouriertransformierte $\mathcal{F}$ der Gauß'schen Glockenkurve $g(y) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y^2}$ gegeben ist durch

$$\mathcal{F}[g(y)](x) := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\, g(y) = \sqrt{2\pi}\, g(x)$$

und dass die δ-Distribution $\hat{\delta}_0[\phi]$ mit Hilfe von $\delta(x) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\pi}\, \mathcal{F}[g(\varepsilon y)](x)$ dargestellt werden kann.

Übung 4 (4 Punkte): *Ortsoperator im Impulsraum*

Zeigen Sie, dass der Ortsoperator im Impulsraum durch $\vec{x} \to -\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\, \vec{\nabla}_{\vec{p}}$ realisiert wird.

Bitte wenden.

Übung 5 (6 Punkte): *Baker-Campbell-Hausdorff-Formel*

Es seien zwei Operatoren A und B gegeben mit $[C, A] = [C, B] = 0$, wobei $C := [A, B]$.

5.1 Zeigen Sie, dass für alle $n \geq 0$ gilt

$$[A, B^n] = [A, B] \, \frac{\mathrm{d}B^n}{\mathrm{d}B}$$

und dass deshalb

$$[A, F(B)] = [A, B] \, \frac{\mathrm{d}F(B)}{\mathrm{d}B}$$

für alle Funktionen F, die sich in eine Reihe entwickeln lassen.

5.2 Definieren Sie eine Familie von Operatoren $G(t)$, $t \in \mathbb{R}$, durch $G(t) := \mathrm{e}^{At}\,\mathrm{e}^{Bt}$ und zeigen Sie, dass diese der Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}G(t)}{\mathrm{d}t} = (A + B + t[A, B]) \; G(t)$$

genügt. Beweisen Sie hiermit die *Baker-Campbell-Hausdorff-Formel*, die besagt, dass

$$\mathrm{e}^{A}\,\mathrm{e}^{B} = \mathrm{e}^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]} \,.$$

Zeigen Sie schließlich, dass

$$U_\alpha \, V_\beta = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\alpha\beta}{\hbar}} \, V_\beta \, U_\alpha$$

mit $U_\alpha = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha Q/\hbar}$, $V_\beta = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta P/\hbar}$, wobei Q den Ortsoperator und P den Impulsoperator bezeichnet.

Historische Zitate zum Verständnis der Quantenmechanik

There was a time when the newspapers said that only twelve men understood the theory of relativity. I do not believe there ever was such a time. There might have been a time when only one man did, because he was the only guy who caught on, before he wrote his paper. But after people read the paper a lot of people understood the theory of relativity in some way or other, certainly more than twelve. On the other hand, I think I can safely say that nobody understands quantum mechanics.

aus: Richard P. Feynman, *The Character of Physical Law*, Modern Library, 1994.
(vorgetragen im Rahmen der „Messenger Lectures“ an der Cornell University im Nov. 1964)

Wir saßen zu dritt in dem kleinen Wintergarten, der sich an Bohrs Ehrenwohnung nach dem Park zu anschloß, und sprachen über das alte Thema, ob die Quantentheorie eigentlich vollständig verstanden und ob die Deutung, die wir ihr hier vor 25 Jahren gegeben hatten, inzwischen allgemein anerkanntes Gedankengut der Physik geworden sei. Niels erzählte:

„Vor einiger Zeit war hier in Kopenhagen eine Philosophentagung, zu der vor allem Anhänger der positivistischen Richtung gekommen waren. Vertreter der Wiener Schule spielten dabei eine wichtige Rolle. Ich habe versucht, vor diesen Philosophen über die Interpretation der Quantentheorie zu sprechen. Es gab nach meinem Vortrag keine Opposition und keine schwierigen Fragen; aber ich muß gestehen, daß eben dies für mich das Schrecklichste war. Denn wenn man nicht zunächst über die Quantentheorie entsetzt ist, kann man sie doch unmöglich verstanden haben. Wahrscheinlich habe ich so schlecht vorgetragen, daß niemand gemerkt hat, wovon die Rede war.“

aus: Werner Heisenberg, *Der Teil und das Ganze*, Piper Verlag, München 1969.