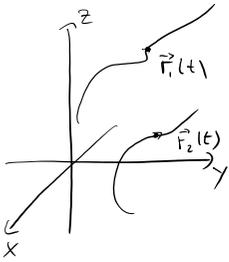


## 1.1 Modellannahmen

Modell: Punktteilchen im  $\mathbb{R}^3$ .



Das  $i$ -te Teilchen hat

- eine Masse  $m_i$
- Ladung  $Q_i$
- Zu jeder Zeit  $t \in \mathbb{R}$  eine Position

$$\vec{r}_i(t) = \begin{pmatrix} x_i(t) \\ y_i(t) \\ z_i(t) \end{pmatrix}$$



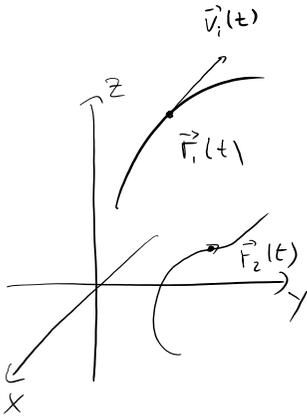
[Quelle: Free Stock Videos via YouTube. CC0]

Erfolge führten zum **mechanistischem Weltbild**: Wirklichkeit **ist** Mechanik.

Später wurden Probleme des Modells deutlich:

- Begriff des "Punktteilchens" problematisch. Tatsächliche Körper scheinen ausgedehnt. Punktteilchen mit elektrischer Ladung hätten unendliche Eigenenergie. (Modellbildung wird in der Theorie der starren Körper gerechtfertigt)
- SRT: Masse & Teilchenzahl nicht konstant. (Kann bei geringen Energien ignoriert werden)
- ART: euklidisches Modell keine korrekte Beschreibung der Geometrie des Raumes. (Aber auf kurzen Skalen eine gute Näherung)
- QM: Man kann Teilchen keinen definitiven Ort zuweisen. Physikalische Eigenschaften können nicht unabhängig von Beobachtern beschrieben werden! (Aber gute Näherung für große Teilchen die mit der Umgebung wechselwirken)

## 1.2 Bewegungsgleichungen



Dynamik  $\vec{r}_i(t)$  durch Bewegungsgleichungen beschrieben.

BWG. stellen Bed. an Zeitableitungen

der Bahnen:

(Momentan-) Geschwindigkeit

$$\vec{v}_i(t) = \frac{d}{dt} \vec{r}_i(t)$$

$$= \dot{\vec{r}}_i(t)$$

$$= \begin{bmatrix} \dot{x}_i(t) \\ \dot{y}_i(t) \\ \dot{z}_i(t) \end{bmatrix}$$

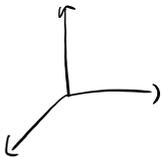
$$\vec{a}_i(t) = \ddot{\vec{r}}_i(t)$$

Beschleunigung

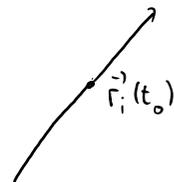
### Zutaten:



Ein Bezugssystem ist *inertial*, wenn für die Bahnen von Teilchen, die unter keinem äußeren Einfluss stehen, die Beschleunigung verschwindet.



$$\ddot{\vec{r}}_i(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{r}_i(t) = \underbrace{\vec{r}_i(t_0)}_{\text{Anfangsbed.}} + t \underbrace{\dot{\vec{r}}_i(t_0)}_{\text{Anfangsbed.}}$$



"geradlinig, gleichförmig"

### Anmerkung:

Es ist nicht sehr klar, wie man feststellen soll, dass "kein äußerer Einfluss" wirkt. Die Definition ist daher nicht besonders befriedigend.

In der Praxis ist ein relativ zur Erdoberfläche fixiertes Koordinatensystem eine annehmbare Annäherung an ein Inertialsystem. Ein im luftleeren Raum frei fallendes System (z.B. im Orbit um die Erde) ist deutlich besser.

Alle Koordinatensysteme in dieser VL sind inertial, wenn es nicht ausdrücklich anders gesagt wird. Man kann aber auch in "beschleunigten" Systemen rechnen -> später.

2

Beschleunigung ist proportional zu einer Kraft.

$$(\vec{F} = m \vec{a})$$

$$\ddot{\vec{r}}_i(t) = \frac{1}{m_i} \vec{F}_i(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t)$$

Anmerkungen:

- Kräfte hängen i.d.R. nur von den Orten, der Zeit und den Geschwindigkeiten ab.
- Die Formel  $F = m a$  definiert erst mal nur eine neue Größe. Um Vorhersagen zu ermöglichen, braucht man eine weitere Zutat:

3

Regeln, um den Kraftvektor in physikalisch relevanten Situationen zu berechnen.

3.1

Eine Liste *fundamentaler Kraftgesetze*:

Bsp.: • Gravitation

$$\vec{F}_{ij} = m_i m_j G \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|^3}$$

Diagramm zur Gravitationsformel: Ein Kraftvektor  $\vec{F}_{ij}$  zeigt von Teilchen  $i$  zu Teilchen  $j$ . Die Beschriftung "wirkt auf i-tes Teilchen" ist unter Teilchen  $i$  und "durch j-rs Teilchen" unter Teilchen  $j$ . Rechts daneben ist ein Vektor  $\vec{r}_j - \vec{r}_i$  zwischen zwei Punkten  $i$  und  $j$  eingezeichnet.

- Coulomb 
$$\vec{F}_{ij} = - \frac{e_i e_j}{4\pi \epsilon_0} \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|^3}$$

- Alle fund. Kraftgesetze erfüllen 
$$\vec{F}_{ij} = - \vec{F}_{ji}$$

3.2 Superpositionsprinzip: Gesamtkraft ist die Summe aller individuellen Kräfte

$$\vec{F}_i = \sum_j \vec{F}_{ij}$$

Die drei "Zutaten" sind angelehnt an, aber nicht identisch mit, den "Drei Newtonschen Gesetzen".

Tatsächlich sind die "Gesetze" von Newton keine Gesetze im modernen Sinn. D.h. sie sind nicht ein vollständiges System von Axiomen, aus denen sich die Theorie ableiten lässt.

Das erste Gesetz "In Abwesenheit äußerer Einflüsse bewegen sich Teilchen geradlinig und gleichförmig" ist eher eine Definition (nämlich eines Inertialsystems) als ein Gesetz.

Das zweite Gesetz "F = m a" ist auch mehr Definition (der Kraft) als ein Gesetz, das Vorhersagen ermöglicht. Schließlich ist **jede** Bahn damit kompatibel - man setze einfach F(t) := m a(t). Erst zusammen mit spezifischen Kraftgesetzen erhält man eine Theorie, die geprüft werden kann.

Das dritte Gesetz "Kraft = Gegenkraft" schränkt die möglichen Kraftgesetze ein wenig ein. Hieraus kann man schon erste Konsequenzen ableiten (z.B. Impulserhaltung -- dazu später mehr). Aber warum ausgerechnet dieser eine Aspekt fundamentaler Kräfte den Status eines Gesetzes erlang hat, und deren anderen Eigenschaften nicht, ist nicht offenbar.

Man sieht hier einen Unterschied zwischen mathematischer und physikalischer Tradition.

Mathematiker sind "Geschichtsrevisionisten". Sie erforschen eine Theorie - und sobald sie gut verstanden ist, wird die ursprüngliche Formulierung vergessen, und durch eine minimalistische, stringente Version ersetzt.

Physiker sind eher traditionsbewusst und wiederholen alten Konzepte, auch wenn sie aus moderner Sicht nicht mehr ideal sind.

(Philosophen sind natürlich noch um einiges extremer. Dort wird die Meinung der ursprünglichen Autoren so hoch geschätzt, dass man sogar Originalquellen liest... Abstrus, oder?)

### 1.3 Ziele der Mechanik

Gegeben Bewegungsgleichungen:

$$N = 3m \left\{ \begin{array}{l} \ddot{\vec{r}}_1(t) = \frac{1}{m_1} \vec{F}_1(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \\ \vdots \\ \ddot{\vec{r}}_m(t) = \frac{1}{m_m} \vec{F}_m(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \end{array} \right.$$

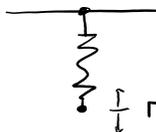
Freiheitsgrade  
(FHG)

$$\vec{r} := \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_N \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}, \quad \vec{f} := \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{1}{m_1} F_{1,x} \\ \frac{1}{m_1} F_{1,y} \\ \vdots \\ \frac{1}{m_m} F_{m,z} \end{pmatrix}$$

$$\leadsto \ddot{\vec{r}} = \vec{f}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

Mögliche Ziele:

- Explizite Lösung durch elementare Funktionen

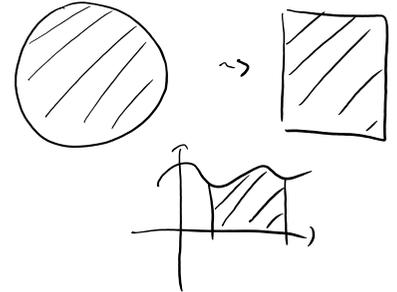


$$\int r(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

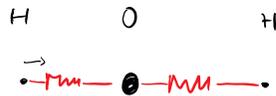
- Explizite Lösung mit Funktionen, die durch eindimensionale Integrale definiert sind ("Quadraturen")



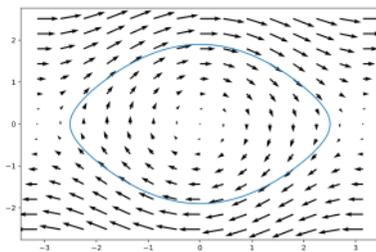
$$H(\phi) = \int_0^{\phi} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi'}} d\phi'$$



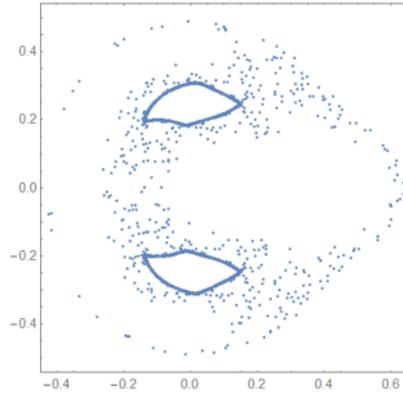
- Explizite Lösung vereinfachter, approximativer Bewegungsgleichungen



- Lösung durch numerische Integration



- Aussagen über qualitatives Verhalten
  - Ungebunden, gebunden, periodische Lösungen
  - Stabil vs. chaotisch



## 2. Newtonsche Mechanik am Beispiel von eindimensionalen Systemen

Für eine Übersicht über dieses Kapitel, vergl. entsprechenden [Blog-Eintrag](#)

## 2.1 Dynamik im Phasenraum

Newton'sche BW Gl.:

$$(N) \quad \ddot{r}(t) = \frac{1}{m} F(r(t), \dot{r}(t))$$

Schreibe um in 2 gekop. DGLen 1. Ordnung.

Dazu:  $v(t) = \dot{r}(t)$

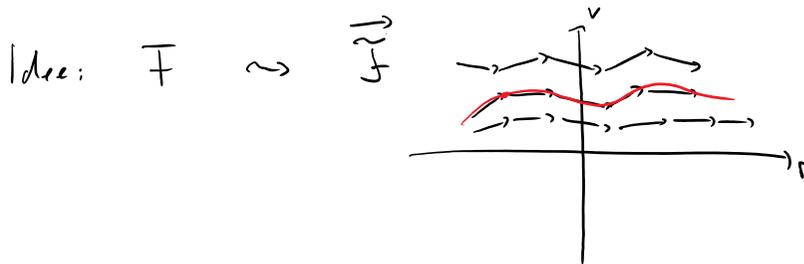
Dann:

$$(N) \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{r}(t) = v(t) \\ \dot{v}(t) = \frac{1}{m} F(r(t), v(t)) \end{cases}$$

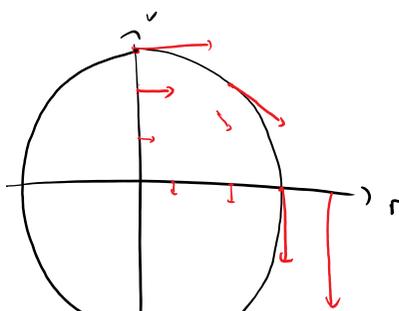
$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{Phasenraum}$$

$$\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} v \\ \frac{1}{m} F(r, v) \end{pmatrix} \quad \text{Vektorfeld (der Kraft } F).$$

$$(N) \Leftrightarrow \boxed{\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \vec{f}(\vec{x}(t))}$$



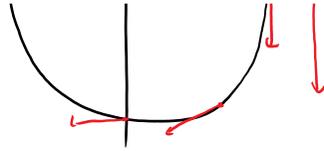
Bsp: Harmon. Osz.  $m=1, k=1. \rightsquigarrow F(r) = -r$



$$\rightsquigarrow \vec{f} \begin{pmatrix} r \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -r \end{pmatrix}$$

Für  $\vec{x}(t)$  rate:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} a \sin t \\ a \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$



$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} a \sin t \\ a \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

Test :

$$\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ -a \sin t \end{pmatrix} = \vec{f}(\vec{x}(t))$$

Gegeben ein V.F.  $\vec{f}$ . Eine Bahnkurve  $\vec{x}(t)$  mit

$$\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \vec{f}(\vec{x}(t))$$

nennt man Integralkurve des V.F.

## 2.1.1 Computerimplementierung

<http://www.thp.uni-koeln.de/gross/tp1-blog/posts/pendel-phasenraum/>

### Phasenraumfluss

Bewegungsgleichung für das mathematische Pendel:

$$\ddot{\phi}(t) = -\sin \phi(t). \quad (1)$$

Wir führen eine Variable  $v(t)$  für die erste Zeitableitung ein

$$v(t) = \dot{\phi}(t).$$

Dann ist (1) äquivalent zu diesem System aus zwei gekoppelten DGL'en erster Ordnung

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(t) &= v(t) \\ \dot{v}(t) &= -\sin \phi(t). \end{aligned} \quad (2)$$

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Erzeuge das Richtungsvektorfeld, dass durch die rechte Seite von (2) gegeben ist.

# Definitionsbereich: Ein Gitter von 15 x 15 Punkten im Bereich
# -2 pi ... 2 pi (für phi),
# - pi ... pi (für v).

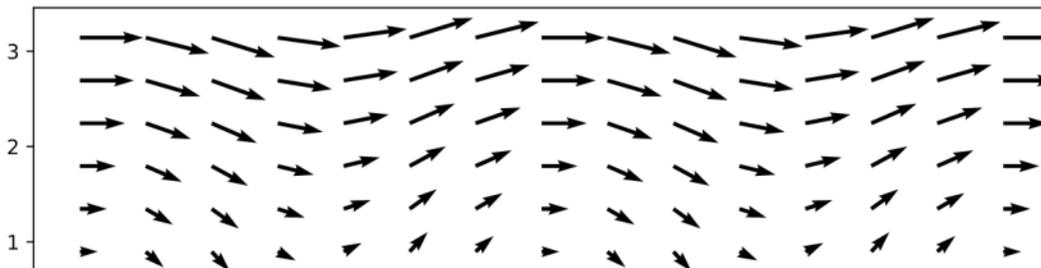
phi, v = np.meshgrid(np.linspace(-2*np.pi, 2*np.pi, 15), np.linspace(np.pi, -np.pi, 15))

# Berechne das Vektorfeld wie in Formel (2)

F_phi = v
F_v = -np.sin(phi)

# Matplotlib kann Vektorfelder mit einem "Quiver-Plot" visualisieren

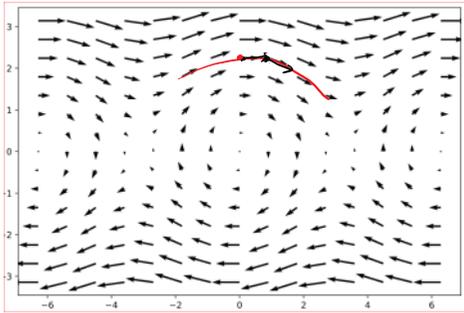
plt.quiver(phi,v,F_phi,F_v);
```



•  
•  
•

## 2.1.2 Euler-Verfahren

Gegeben Anfangsbedingung  $\vec{x}(0) = \vec{y}$ , finde  $\vec{x}(t)$ .



Euler:

- Wähle "kleines" Zeitintervall  $\tau$ .

- Für  $t = 0$  setze  $\vec{x}(0) = y$

$t \in (0, \tau]$

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(0) + t \vec{f}(\vec{x}(0))$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \vec{f}(\vec{x}(0)) \approx \vec{f}(\vec{x}(t)) \quad (*)$$

$t \in (\tau, 2\tau]$

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(\tau) + (t - \tau) \vec{f}(\vec{x}(\tau))$$

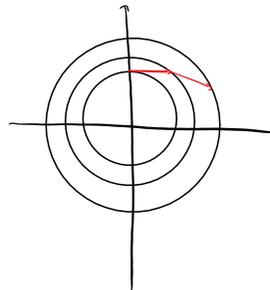
⋮

⋮

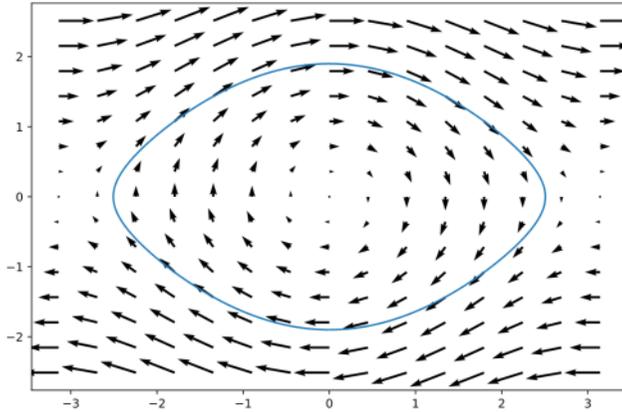
Wenn das Vektorfeld stetig ist, und  $\tau$  klein im Vergleich zu den Skalen, auf denen sich das Vektorfeld ändert, dann ist der Approximationsfehler in (\*) klein. Tatsächlich kann man zeigen, dass für feste Maximalzeit  $T$  und stetiges Vektorfeld, das Eulerverfahren im Limes  $\tau \rightarrow 0$  exakt ist.

Allerdings konvergiert das Eulerverfahren sehr schlecht. In der Computerphysik werden Sie bessere Methoden kennenlernen.

Man kann leicht sehen, dass das Eulerverfahren für Probleme mit periodischen Lösungen dazu neigt, zu immer energiereicheren Lösungen zu springen. Vergl. VL.



2.1.3 Picard-Lindelöf: Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der Bewegungsgleichungen



Legen BW Gen die Zukunft eindeutig fest?

Also: hat

$$\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \vec{f}(\vec{x}(t)), \quad \vec{x}(t_0) = \vec{y}$$

immer eindeutige Lsg.?

Globale Version des Satzes von Picard-Lindelöf [\[Bearbeiten\]](#)

[Quelltext bearbeiten](#)

Es sei  $E$  ein Banachraum und  $f: [a, b] \times E \rightarrow E$  eine stetige Funktion, die eine globale Lipschitz-Bedingung bezüglich der zweiten Variablen erfüllt. Dann gibt es zu jedem  $y_0 \in E$  eine globale Lösung  $y: [a, b] \rightarrow E$  des Anfangswertproblems

$$y' = f(\cdot, y), \quad y(a) = y_0.$$

Es gibt keine weiteren (lokalen) Lösungen.

Wörterbuch

Picard-Lind.	TP 1
$E$	$\mathbb{R}^2$ , $\ \vec{x}\  = \sqrt{r^2 + v^2}$
$y$	$\vec{x}(t)$
$[a, b]$	Zeitintervall
$f(\cdot, y)$	$\vec{f}(t, \vec{x}(t))$
$y' = f(\cdot, y)$	$\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \vec{f}(t, \vec{x}(t))$

Lipschitz:  $\|\vec{\nabla}_{\vec{x}} \vec{f}\| < C \quad \forall \vec{x}, t$

...  $\Leftrightarrow |F'(r)| < C \quad \forall r.$

• Mathemat. Pendel:  $|F'(\varphi)| = |\cos \varphi| \leq 1.$  ✓

• Coulomb / Gravitation:



Also: Wenn das Vektorfeld hinreichend stetig ist, gibt es immer eine Lösung zu den Bewegungsgleichungen. Diese ist eindeutig.

Folgerung: Mechanische Systeme können Fixpunkte der Dynamik nie erreichen.

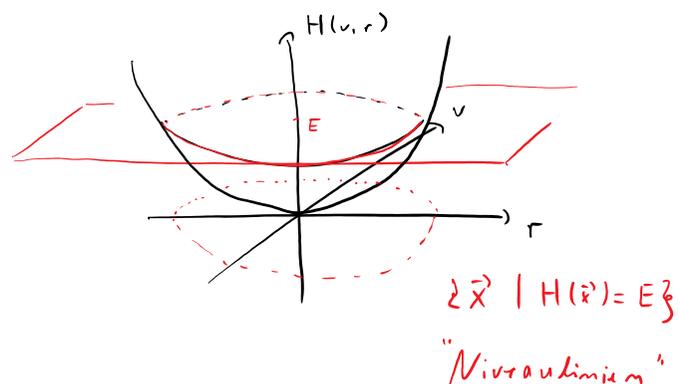
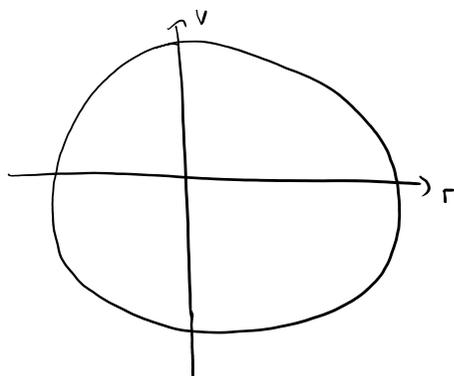
Warum?





Bsp.: Harmon. U2.  $m = k = 1.$

$$T(v) = \frac{1}{2} m v^2, \quad U(r) = \frac{1}{2} r^2, \quad H(v, r) = \frac{1}{2} \|\vec{x}\|^2.$$



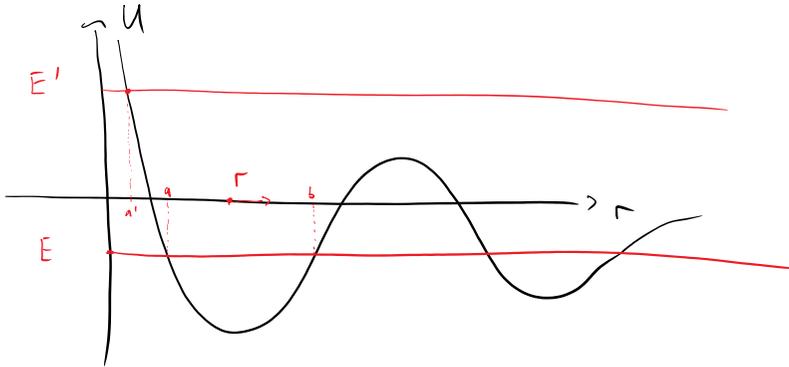
### Bemerkung

Wir sind drei Objekten begegnet, die alle die Interpretation einer "Energie" haben, die aber als mathematische Objekte sehr unterschiedlich sind.

Bitte nicht verwirren lassen!

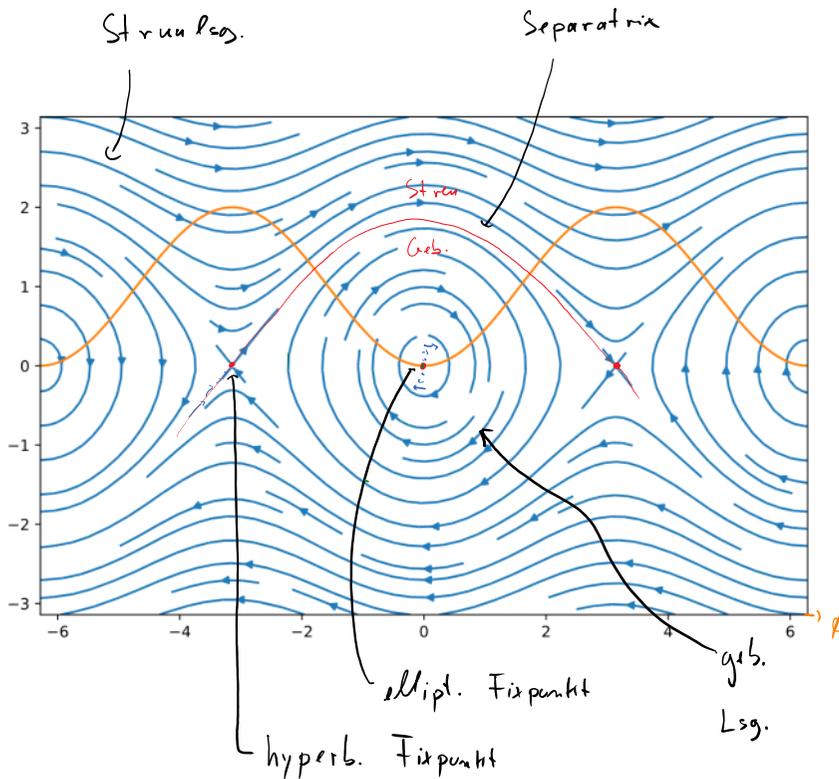
- $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$       $\vec{x} \mapsto H(\vec{x}) = E$
- Gegeben  $r(t), \quad H(r(t), \dot{r}(t)) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- $E \in \mathbb{R}$  s.d.  $H(r(t), \dot{r}(t)) = E$

## 2.3 Qualitative Analyse eindimensionaler Dynamik



Bahnen in 1-D sind auf Intervalle  $[a, b]$  beschränkt.

- Wenn  $a = -\infty$  oder  $b = \infty$  dann: Streulösung.
  - Ansonsten: gebundene Lsg.
- Wendepkte:  $U(a) = U(b) = E$ .



— Potential  $1 - \cos \phi$

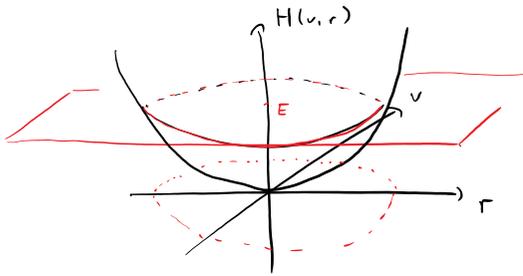


math. Pendel



Eisbe auf Wellblech.

## 2.4 Lösung durch Quadraturen



**Idee:** Benutze Energiesatz, um die Dimension des Problems von zwei auf eins zu reduzieren.

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}(t)^2 + U(r(t)) \Leftrightarrow \dot{r}(t) = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (E - U(r(t)))}$$

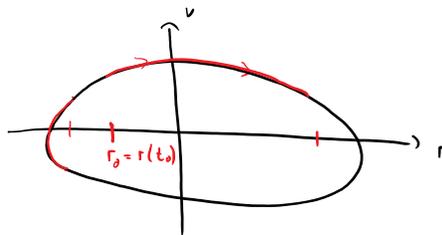
Eine DGL 1. Ordnung.

Trennung der Variablen

Gegeben DGL  $\frac{dr}{dt} = f(r)$

wobei rechte Seite nicht direkt von  $t$  abhängt.

Trick: Finde zunächst Umkehrfkt.  $t(r)$ .



$r(t)$  invertierbar, auf Intervallen, die keinen Wendepkt. enthalten.

$$t(r) = \int \frac{dt}{dr} dr + C$$

$$= \int \frac{1}{\frac{dr}{dt}(t(r))} dr + C$$

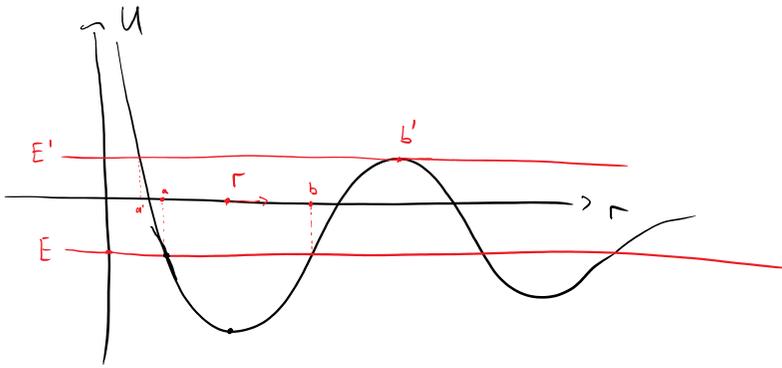
$$\stackrel{(DGL)}{=} \int \frac{1}{f(r)} dr + C = \int_{r_0}^r \frac{1}{f(r')} dr' + t_0$$

Allgemeines Rezept: Lösung der BWGen für Potential  $U(r)$  in zwei Schritten:

$$\textcircled{1} \quad t(r) = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_0}^r \frac{1}{\sqrt{E - U(r')}} dr' + t_0$$

$\textcircled{2}$  Invertieren.

## 2.5 Periodendauer



Betrachte Lösung  $r(t)$ , die im Intervall  $[a, b]$  gebunden ist.

Periodendauer:

$$\tau = 2 \sqrt{\frac{m}{2}} \int_a^b \frac{1}{\sqrt{E - U(r')}} dr'$$

Achtung: Integrand divergiert bei  $a/b$ .

Frage: Wann ist  $\tau < \infty$ ?  
 $= \infty$ ?

Analysiere um  $a$  herum.

(I)  $a$  kein lokaler Extrempunkt des Potentials.

$$\leadsto U(a+\varepsilon) \approx E - G \cdot \varepsilon$$

$$\int_a^{a+\delta} \frac{1}{\sqrt{E - U(r')}} dr' = \int_0^\delta \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} d\varepsilon = 2 \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{G}} < \infty!$$

(II)  $a$  lokales Maximum um

$$U(a+\varepsilon) \approx E - G \varepsilon^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{G}} \int_0^\delta \frac{1}{\varepsilon} d\varepsilon = \infty.$$

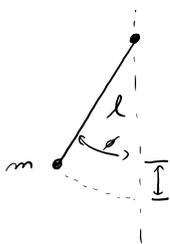
$\rightarrow$  Gebundene Lsg. sind:

- Periodisch,  $r(t) = r(t+\tau)$  wenn WP  $a/b$  keine Extrempkt. von  $U$  sind

oder

- Kriechlösungen, die  $\infty$  langsam auf Maximum zulaufen

## 2.6 Analytische Lösung des mathematischen Pendels



$$U(\phi) = mgl(1 - \cos\phi) = 2mgl \sin^2 \frac{\phi}{2}$$

$$T(\dot{\phi}) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\phi}^2 \quad (v = l \dot{\phi})$$

$$\Rightarrow L(\phi) = \sqrt{\frac{m l^2}{2}} \int_0^{\phi} \frac{1}{\sqrt{E - 2mgl \sin^2 \frac{\phi'}{2}}} d\phi'$$

$$= \sqrt{\frac{m l^2}{2E}} \int_0^{\phi} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2mgl}{E} \sin^2 \frac{\phi'}{2}}} d\phi'$$

$\frac{1}{k^2}$

$$= \frac{\sqrt{m l^2}}{\sqrt{4mglk^2}}$$

$$= \frac{1}{\omega k} \int_0^{\phi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{k^2} \sin^2 \phi'}} d\phi'$$

$$= \frac{1}{\omega k} F\left(\frac{\phi}{2} \mid \frac{1}{k^2}\right)$$

[A] [http://people.math.sfu.ca/~cbm/aands/abramowitz\\_and\\_stegun.pdf](http://people.math.sfu.ca/~cbm/aands/abramowitz_and_stegun.pdf)

$$= \frac{1}{\omega} F(\alpha \mid k^2)$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{k} \sin \frac{\phi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \phi = 2 \arcsin(k \sin \alpha)$$

Invertiere (A 16.1.4)

$$\alpha = \operatorname{am}(\omega t \mid k^2)$$

Übliche:  $\sin \operatorname{am}(\cdot \mid k^2) =: \operatorname{sn}(\cdot \mid k^2)$

Jacobische Elliptische Fkt.

Abkürzungen

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{Eigenfreq. im Limes } \phi \ll 1$$

$$k = \sqrt{\frac{E}{2mgl}} \quad \text{Wurzel Energie in Einheiten der max. Pot. Energie}$$

$$\Leftrightarrow E = 2mgl k^2$$

## Jacobische Elliptische Fkt.

$$\Rightarrow \alpha = \arcsin \operatorname{sn}(\omega t | k^2)$$

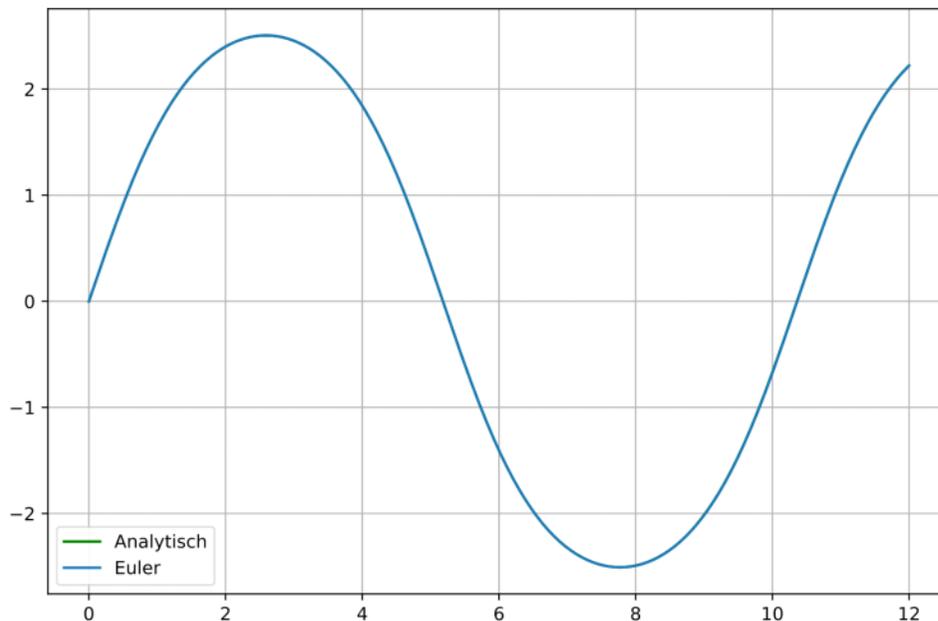
$$\Rightarrow \phi = 2 \arcsin(k \cdot \operatorname{sn}(\omega t | k^2)) \quad \text{☺}$$

Mit  $\phi(0) = 0$ :

$$\Rightarrow k = \sqrt{\frac{E}{2mg\ell}} = \sqrt{\frac{m\ell^2 \dot{\phi}(0)^2}{4mg\ell}} = \frac{1}{2\omega} \dot{\phi}(0)$$

### Analytische Lösung

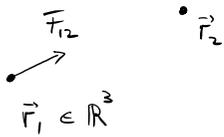
```
[55]: k=0.5*vs[0]
plt.plot(ts, [ 2*np.arcsin(k*spec.ellipj(t,k**2)[0]) for t in ts], 'g', label='Analytisch')
plt.plot(ts,phis, label='Euler')
plt.legend(loc='best')
plt.xlabel('t')
plt.grid()
```



### 3. Das Zweikörperproblem

Für eine Übersicht über dieses Kapitel, vergl. entsprechenden [Blog-Eintrag](#)

### 3.1 Reduktion auf ein Teilchen unter Zentralkraft



$$\vec{F}_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = f(\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|) \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|}$$

Bsp:

• Planet im Schwerfeld der Sonne



• Streuung von  $\alpha$ -Teilchen an Atomkern



Ziel dieser Lektion:  
reduziere BWGen auf die für **ein** Teilchen unter der Wirkung einer **Zentralkraft**.

Dazu:

Def.:

•  $M = m_1 + m_2$

Gesamtmasse

•  $\vec{r}_S = \frac{m_1}{M} \vec{r}_1 + \frac{m_2}{M} \vec{r}_2$

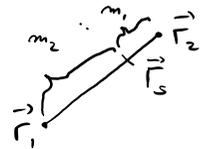
Schwerpunktskoord.

•  $\vec{p}_S = M \cdot \dot{\vec{r}}_S$

Gesamtimpuls

•  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$

Relativkoordinaten



$\Rightarrow \vec{r}_S(t), \vec{r}(t)$  beschreiben vollständig  $\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t)$ .

Warum dieser Koordinatenwechsel?

Darum:

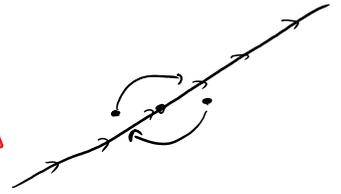
$$\frac{d}{dt} p(t) = m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F} + \vec{F} = 0$$

Darum:

$$\frac{d}{dt} \vec{p}_S(t) = m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0.$$

Erhaltungsgröße!

$$\Rightarrow 0 = \ddot{\vec{r}}_S(t) \Rightarrow \boxed{\vec{r}_S(t) = \vec{r}_S(0) + t \dot{\vec{r}}_S(t)}$$



Es bleiben: BWGen für  $\vec{r}$ :

$$\boxed{\ddot{\vec{r}}} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{1}{m_1} \vec{F}_{12} + \frac{1}{m_2} \vec{F}_{12}$$

$$= \frac{m_2 + m_1}{m_1 \cdot m_2} f(\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|) \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\|\dots\|}$$

$$\boxed{= \frac{1}{\mu} (-f(r)) \hat{r}}$$

$\sim \vec{r}$  "Zentralkraft"

Def.:

$$\bullet \mu := \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{reduzierte Masse}$$

$$\bullet r = \|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|$$

$$\bullet \hat{r} := \frac{\vec{r}}{r}$$

### 3.2 Drehimpulserhaltung unter Zentralkräften

$$(Z) \quad \ddot{\vec{r}} = \frac{1}{\mu} (-f(r)) \hat{r}$$

Def.:  $L(\vec{r}, \vec{v}) = \mu \vec{r} \times \vec{v}$  Drehimpuls.

Dann: Wenn  $\vec{r}(t)$  (Z) erfüllt, dann

$$\frac{d}{dt} \vec{L}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)) = 0.$$

Bew.:  $\frac{d}{dt} (\mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \mu \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_{=0} + \mu \underbrace{\vec{r} \times \ddot{\vec{r}}}_{\substack{(Z) \sim \vec{r} \\ =0}} = 0 \quad \square$

Also: Für jede Lsg.  $\vec{r}(t)$  von (Z) gibt es ein  $\vec{l} \in \mathbb{R}^3$  s.d.

$$\vec{L}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)) = \vec{l} \quad \forall t.$$

Schreibe...--

... als

$$\vec{L} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\vec{r}, \vec{v} \mapsto \vec{L}(\vec{r}, \vec{v})$$

$$\vec{L}$$

Gegeben Bahn  $\vec{r}(t)$ :

$$\vec{L} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t \mapsto \vec{L}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t))$$

$$\vec{L}$$

$$\vec{l} \in \mathbb{R}^3$$

$$\vec{L}$$

3.3 Die Ekliptik und das zweite Keplersche Gesetz

Drehimpulserhaltung:  $\vec{L} = \mu \vec{r}(t) \times \dot{\vec{r}}(t) = \text{const.}$

Konsequenzen:

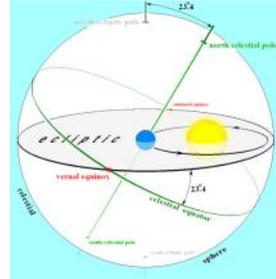
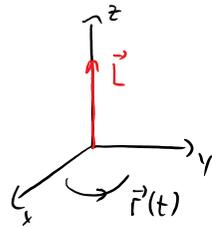
① Betrachte nur Richtung von  $\vec{L}$ :

$\rightarrow \vec{r}(t) \perp$  auf  $\vec{L}$  steht.

$\rightarrow$  Dynamik findet nur in zwei Dimens. statt!

$\rightarrow$  3 FHG  $\rightarrow$  2 FHG.

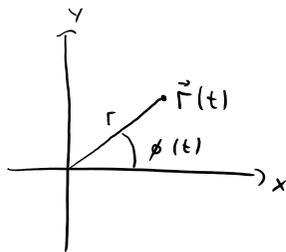
$\rightarrow$  Oft: Wähle Koordinaten so, dass  $\vec{e}_z \parallel \vec{L}$ .



[Quelle: Wikipedia, CC-BY-SA 3.0]

② Betrachte  $\|\vec{L}\| = l$ .

Dazu: Führe Polarkoordinaten ein:



$\phi$  = "wahre Anomalie"  
= "Winkel"

[Vergl. <http://www.thp.uni-koeln.de/gross/tp1-blog/posts/anomalie/>]

$$\vec{r}(t) = r(t) \begin{pmatrix} \cos \phi(t) \\ \sin \phi(t) \end{pmatrix}$$

$$\hat{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos \phi(t) \\ \sin \phi(t) \end{pmatrix}$$

Berechne:

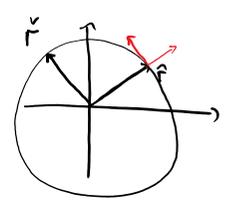
$\rightarrow$  .

N.R.:  $\dot{\vec{r}}$  \_\_\_\_\_  
 $\rightarrow$  \_\_\_\_\_

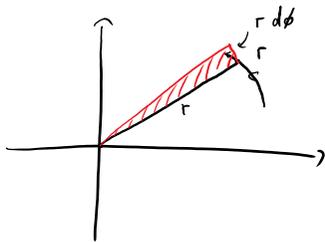
Berechne:

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \\ &= \mu \underbrace{\vec{r} \times (\dot{r} \hat{r} + r \dot{\phi} \hat{\phi})}_{=0} \\ &= \mu r^2 \dot{\phi} \underbrace{\hat{r} \times \hat{\phi}}_{\vec{e}_z} \\ \Rightarrow \|\vec{L}\| &= \mathcal{L} = \mu r^2 \dot{\phi}\end{aligned}$$

IV. K.:  $\vec{r}$

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}} &= \dot{r}(t) \hat{r}(t) + r(t) \begin{pmatrix} -\sin \phi(t) \\ \cos \phi(t) \end{pmatrix} \dot{\phi}(t) \\ &= \dot{r} \hat{r} + r \dot{\phi} \hat{\phi} \\ \Rightarrow \|\dot{\vec{r}}\|^2 &= \dot{r}^2 + \underbrace{r^2 \dot{\phi}^2}_{\frac{\mathcal{L}^2}{\mu^2 r^4}} \\ &= \dot{r}^2 + \frac{\mathcal{L}^2}{\mu^2 r^4}\end{aligned}$$


2. Keplersches Gesetz:



$$\begin{aligned}dA &= \frac{1}{2} r^2 d\phi \Leftrightarrow \dot{A} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\phi} && \text{Flächengeschwindigkeit} \\ &= \frac{\mathcal{L}}{2\mu} \\ &= \text{const.}\end{aligned}$$

### Anmerkung:

Anfang des 17. Jahrhunderts formulierte Johannes Kepler die drei Keplerschen Gesetze. Sie fassten empirische Beobachtungen der Planetenbewegung zusammen. Ende des 17. Jahrhunderts konnte Newton das beobachtete Verhalten erstmals quantitativ erklären.

Wir sind in der VL dem 2. Keplerschen Gesetz zuerst begegnet. Das erste und dritte kommen später vor. Warum? Wir wissen heute, dass das 2. Gesetz allgemeiner gilt als die beiden anderen. Es beruht nur auf der Drehimpulserhaltung und ist für alle Zentralkräfte gültig. Die beiden anderen Gesetze gelten hingegen nur für Zentralkräfte mit einem Potential proportional zu  $1/r$  (wie der Gravitation und der Coulombkraft).

Für die Physik hat diese Allgemeinheit Vor- und Nachteile.

Vorteil: Da das 2. Gesetz unter schwächeren Annahmen gilt, erlaubt es uns Vorhersagen zu machen, selbst wenn die genaue Form des Potentials unbekannt ist.

Nachteil: Wir lernen aus Beobachtungen der Flächengeschwindigkeit nichts über die genaue Form des Potentials. Aufgrund von relativistischen Effekten und der Einwirkung anderer Himmelskörper ist das effektive Potential in dem sich Planeten um die Sonne bewegen nämlich *nicht* gleich dem  $1/r$ -Potential der Newtonschen Gravitation! Abweichungen der Planetenbewegungen von der von Kepler beschriebenen Form waren daher historisch wichtige Zutat, um z.B. unbekannte Planeten zu entdecken, oder die ART zu testen.

### 3.4 Konservative Kräfte und der allgemeine Energiesatz

[Dieses Lektion bezieht sich auf allgemeine Bewegungsgleichungen, nicht nur auf Zentralkräfte]

$N$  FHG, 3 WGL:

$$(*) \quad \ddot{r}_i = \frac{1}{m_i} F_i(\vec{r}) \quad i=1, \dots, N.$$

Energieerhaltung (1-D):  $U(r) = - \int_{r_0}^r F(r') dr' \Rightarrow H = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + U(r) \quad \text{EHG.}$

$$\Downarrow$$
$$F(r) = - \frac{\partial}{\partial r} U(r)$$

Def.: Kraft  $\vec{F}(\vec{r})$  heißt konservativ, wenn es eine Fkt.  $U(\vec{r})$  gibt, s.d.

$$\vec{F}_i(\vec{r}) = - \frac{\partial}{\partial r_i} U(\vec{r}). \quad (K)$$

(Auch:  $\vec{F}$  ist Gradientenfeld oder Potentialkraft).

Energiesatz: Wenn  $\vec{r}(t)$  Lsg. von (\*) ist, dann:

$$\frac{d}{dt} \left[ \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2 + U(\vec{r}) \right] = \sum_i \underbrace{m_i \ddot{r}_i}_{F_i} r_i + \sum_i \underbrace{\frac{\partial U}{\partial r_i}}_{-F_i} r_i = 0.$$

#### Anmerkung:

In der Newtonschen Mechanik ist die Kraft eine fundamentale Größe.

Der Begriff des Potentials wird als formaler mathematischer Ausdruck eingeführt, um (für den Spezialfall konservativer Kräfte) die Erhaltungsgröße Energie definieren zu können.

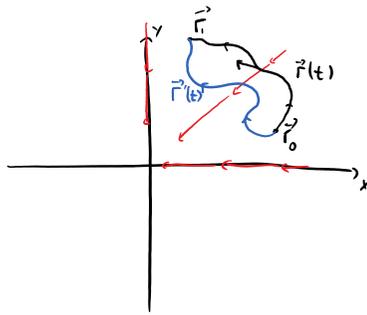
Überraschenderweise stellt sich später heraus, dass Potentiale fundamentaler als Kräfte sind: In der QM sind die Bewegungsgleichungen über Potentiale definiert. Kräfte hingegen können in Quantensystemen i.d.R. nicht definiert werden.

---

Wiederh. [Math. Methoden]

Gegeben:  $\vec{F}(\vec{r})$ .

Versuch:

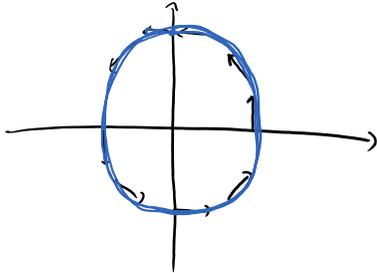


$$\vec{r}(0) = \vec{r}_0$$

$$\vec{r}(1) = \vec{r}_1$$

$$U(\vec{r}) = - \int_0^1 \underbrace{(\vec{F}(\vec{r}(t)), \dot{\vec{r}}(t))}_{\text{Arbeit}} dt$$

wohldefiniert, nur, wenn das Integral  
wegunabhängig ist. (W)



(W) gilt nicht für alle Felder.

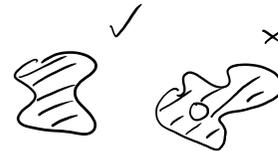
Weitere relevante Eigenschaft:

Für konservatives Feld  $\vec{F}_i = -\frac{\partial U}{\partial r_i}$  gilt:

$$(R) \quad \frac{\partial F_i}{\partial r_j} - \frac{\partial F_j}{\partial r_i} = \frac{\partial^2 U}{\partial r_j \partial r_i} - \frac{\partial^2 U}{\partial r_i \partial r_j} = 0.$$

(3-D: äqu. zu  $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ ).

Satz Sei  $\vec{F}$  V.F. Dann



$$(K) \Leftrightarrow (W) \Rightarrow (R) \quad (\text{"hat keine Löcher"})$$

Wenn der Definitionsbereich von  $\vec{F}$  einfach zusammenh. ist, dann gilt zusätzlich

$$(K), (W) \Leftrightarrow (R)$$

3.5 Reduktion auf eindimensionales Potentialproblem

Betrachte: Zentralkraft  $\vec{F}(\vec{r}) = -f(r) \hat{r}$

Beh.:  $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} U(r)$  mit  $U(r) = \int_{r_0}^r f(r') dr'$ .

Bew.:  $-\frac{\partial}{\partial r_i} U(r) = -f(r) \frac{\partial r}{\partial r_i} = -f(r) \hat{r}_i = \vec{F}(\vec{r})$ . □

$$\frac{\partial}{\partial r_i} \left( \sum_j r_j^2 \right)^{1/2} = \frac{1}{2} \frac{1}{r} 2 r_i$$

→ Zentralkräfte sind konservativ.

→ Energiesatz: Zu jeder Lsg.  $\vec{r}(t)$  der BWG. gibt es ein  $E$  s.d.

$$E = \frac{1}{2} \mu \underbrace{\|\dot{\vec{r}}\|^2}_{\dot{r}^2 + \frac{l^2}{\mu^2 r^2}} + U(r).$$

[2. Keplersche Gesetz]

$$\Leftrightarrow \dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu} \left( E - \underbrace{\frac{l^2}{2\mu r^2} - U(r)}_{-U_{\text{eff}}(r)} \right)^{1/2}}$$

⇒ BWG. für 1 FHG unter effek. Potential

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} + U(r).$$

$$\Rightarrow t(r) = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_{r_0}^r \frac{1}{\sqrt{E - U_{\text{eff}}(r')}} dr'$$

Für  $\phi(t)$ : nutze 2. KG:  $l = \mu r^2 \dot{\phi} \Leftrightarrow \dot{\phi} = \frac{l}{\mu r^2}$

Für  $\phi(t)$ : nutze 2. KG:  $l = \mu r^2 \dot{\phi} \Leftrightarrow \dot{\phi} = \frac{l}{\mu r^2}$

$$\Rightarrow \phi(t) = \frac{l}{\mu} \int_{t_0}^t \frac{1}{r^2(t')} dt'$$

Für  $\phi(r)$ :

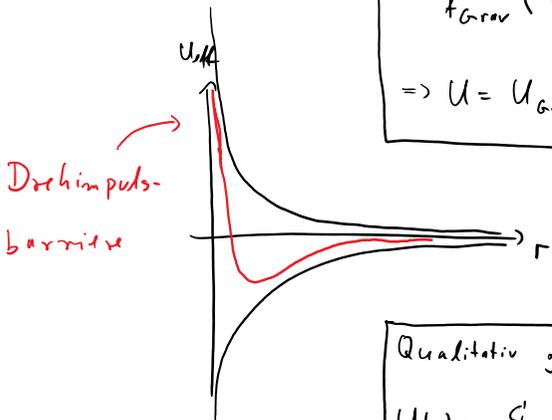
$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{d\phi}{dt} \frac{dt}{dr} = \frac{l}{\mu r^2} \frac{dt}{dr}$$

$$\Rightarrow \phi(r) = \sqrt{\frac{l^2}{2\mu}} \int_{r_0}^r \frac{1}{r'^2 \sqrt{E - U_{eff}(r')}} dr'$$

3.6 Qualitative Analyse: Die Potentialbarriere und Rosettenbahnen

Effektives Potential:  $U_{\text{eff}} = \frac{l^2}{2\mu r^2} + U(r)$

Bsp.  
 $f_{\text{grav}}(r) = G m_1 m_2 \frac{1}{r^2}$   
 $\Rightarrow U = U_{\text{grav}} = -G m_1 m_2 \frac{1}{r}$



Qualitativ gültig für  
 $U(r) \sim -\frac{C}{r^\alpha} \quad \alpha \in (0, 2)$

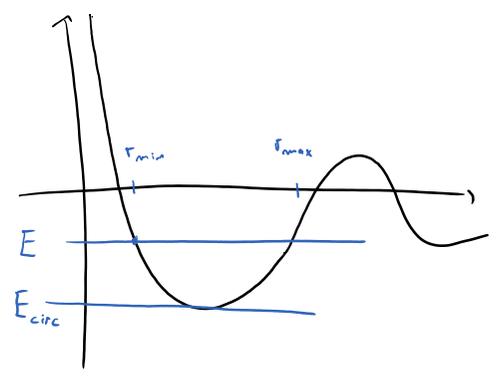
Wenn  $U(r)$  für  $t \rightarrow 0$  langsamer als  $-1/r^2$  divergiert, geht das effektive Potential für kleine Radien gegen  $+\infty$ . Man spricht dann von der Drehimpulsbarriere bei 0.

Im effektiven 1-FHG-Bild wird klar, warum Körper mit nicht-verschwindendem Drehimpuls nicht in das Kraftzentrum fallen: Die Drehimpulsbarriere sorgt für eine effektiv abstoßende Kraft.

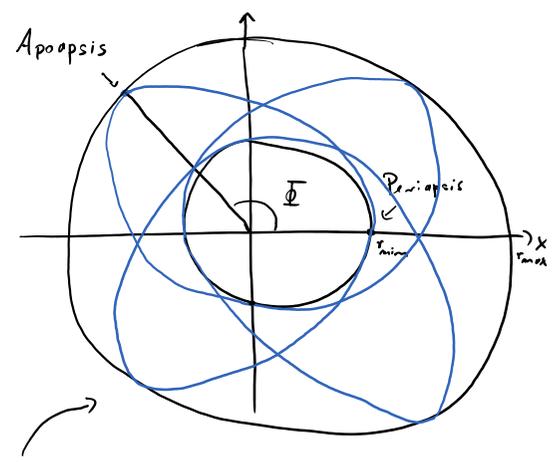
Wir sehen auch: Für Potentiale, die sich in der Nähe des Ursprungs wie  $-1/r^\alpha$  mit  $\alpha > 2$  verhalten, kann der Drehimpuls einen Absturz ins Zentrum nicht verhindern. Dramatisch!

Thema für die Live-Sitzung: Was würde passieren, wenn die Gravitation mit  $1/r^3$  skalieren würde? Da haben wir aber Glück gehabt, oder?

Gebundene Lösungen



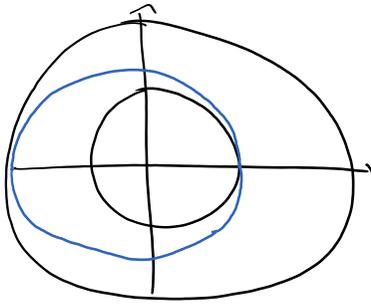
$$\Phi = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{d\phi}{dr'} dr'$$



Rosettenbahn

Eselbrücke  
 Periaps "perimeter"  
 "Umkreis"

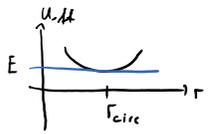
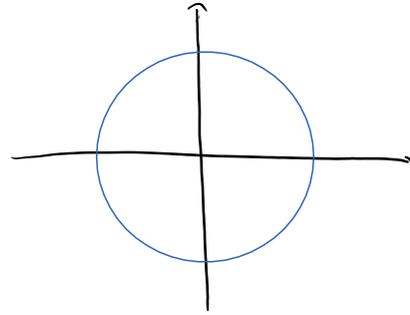
Wichtiges Spezialfall 1:  $\bar{\Phi} = \pi$



→ geschlossene Bahn

→ vgl. Kepler.

Wichtiges Spezialfall 2:  $E$  ist lokales Minimum.



→  $r_{\text{min}} = r_{\text{max}}$

→ kreisförmige Bahn

### 3.7 Lösung des Keplerproblems durch Runge-Lenz-Vektor

Potential:  $U(r) = -\frac{k}{r}$

Bsp.:  $k = G m_1 m_2$  Gravitation

$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2$  Coulomb

Ziel: Beschreibe Bahnen, z.B. durch  $r(\phi)$ .

Zwei Möglichkeiten:

① "Shut up and calculate"

Aus Energiesatz folgt:

$$\phi(r) = \sqrt{\frac{\mu}{2\mu}} \int_{r_0}^r \frac{1}{r'^2 \sqrt{E - U_{eff}(r')}} dr'$$

$$= \sqrt{\frac{\mu}{2\mu}} \int_{r_0}^r \frac{1}{r'^2 \sqrt{E - \frac{\mu^2}{2\mu r'^2} + \frac{k}{r'}}} dr'$$

Kann symbolisch integriert werden, macht aber nicht viel Spaß.  
(Tipp: Koordinatenwechsel zu  $u = \frac{1}{r}$  vereinfacht das Integral).

$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{1 - \frac{a}{x} + \frac{k}{x}}} dx = \frac{x \sqrt{\frac{x(k+x)-a}{x^2}} \tan^{-1}\left(\frac{k-x-2a}{2\sqrt{a} \sqrt{x(k+x)-a}}\right)}{\sqrt{a} \sqrt{x(k+x)-a}} + \text{constant}$$

② Finde weitere EHG.

Def.: Runge-Lenz-Vektor:  $\vec{A} = \mu \dot{\vec{r}} \times \vec{L} - \mu k \hat{r}$

Beh.:

①  $\vec{A}$  ist  $\perp$  zu  $\vec{L}$       ②  $\vec{A}$  ist EHG

Bew: Übung.

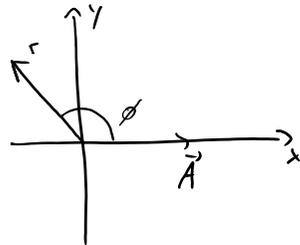
Was bedeutet R-L-V.?

Der Runge-Lenz-Vektor wurde bereits im 17. Jahrhundert als Erhaltungsgröße identifiziert und für Rechnungen genutzt. Erst 200 - 300 Jahre später wurde seine geometrische Bedeutung zufriedenstellend geklärt: Es stellt sich heraus, dass die Lösungen des Keplerproblems mit fixer Energie als Punkte auf einer 4-dimensionalen Sphäre interpretiert werden können. Drei der Dimensionen entsprechen denen des physikalischen Raumes. Der RLV "erzeugt" die Drehung um eine weitere mathematisch definierte Achse.

Sie müssen sich nicht 200 Jahre gedulden um das etwas genauer verstehen zu können - aber einige Wochen Zeit brauchen wir noch, um die relevanten Begriffe in der Hamilton-Mechanik einzuführen.

Nutze zunächst als Rechengröße.

Wähle Koordinaten so, dass  $\vec{e}_x \parallel \vec{A}$ .



$$\|\vec{A}\| r \cos \phi = (\vec{A}, \vec{r}) = \mu \underbrace{(\vec{\dot{r}} \times \vec{L}, \vec{r})}_{\text{Spatprodukt}} - \mu k \underbrace{(\hat{r}, \vec{r})}_r$$

$$= (\underbrace{\mu \vec{\dot{r}} \times \vec{\dot{r}}}_{\vec{L}}, \vec{L}) - \mu k r$$

$$= l^2 - \mu k r$$

$$\Rightarrow r (\mu k + \|\vec{A}\| \cos \phi) = l^2$$

⇒

$$r = \frac{l^2}{\mu k + \|\vec{A}\| \cos \phi}$$

Def :  $\varepsilon = \frac{\|\vec{A}\|}{\mu k}$

numerische Exzentrizität

$$p = \frac{l^2}{\mu k}$$

Halbparameter

⇒

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \phi}$$

①  $\varepsilon = 0 \rightarrow$  Kreis

②  $\varepsilon \in [0, 1) \rightarrow$  Ellipse

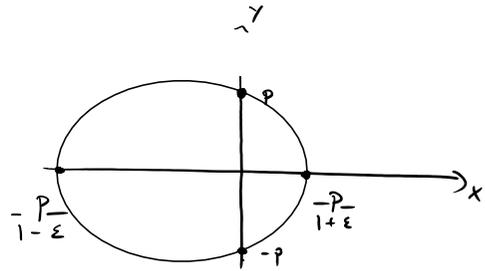
③  $\varepsilon = 1 \rightarrow$  Parabel

④  $\varepsilon > 1 \rightarrow$  Hyperbel

### 3.7.1 Ellipsen und die Keplerschen Gesetze

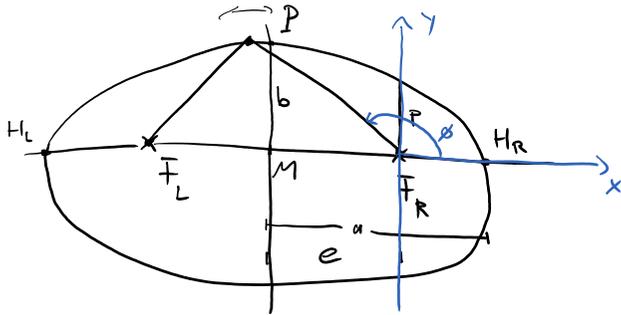
$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \phi}$$

$$\varepsilon \in [0, 1)$$



Wiederholung. "Gärtner konstr."

Wähle Punkte  $F_L, F_R$ , Länge  $a$



$$\leadsto \{ P \mid \overline{PF_L} + \overline{PF_R} = 2a \}$$

ist Ellipse.

$F_L / F_R$	Brennpunkte
$M$	Mittelpunkt
$H_L / H_R$	Scheitelpkte.
$p$	Halbparam.

$a$	große Halbachse
$b$	kleine Halbachse
$e$	lineare Exzentrizität
$\varepsilon = \frac{e}{a}$	num. " "

Beh.:  $r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \phi}$  ist Polardarst. einer Ellipse mit Exzentrizität  $\varepsilon$  und Halbparameter  $p$  bezgl. des rechten Brennpunkts.

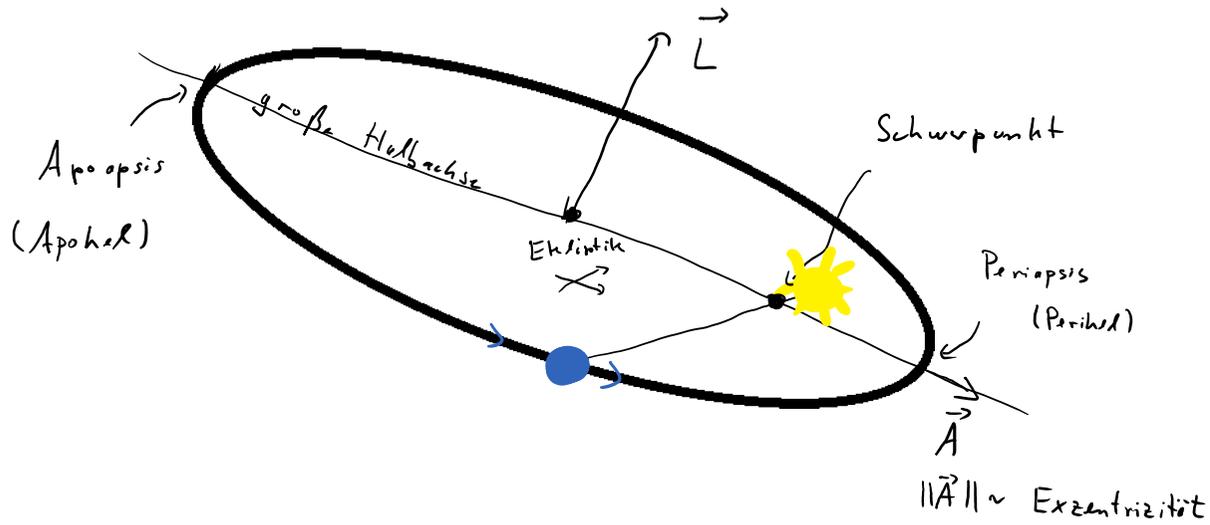
Bew.:  $\rightarrow$  Blog.

<http://www.thp.uni-koeln.de/gross/tp1-blog/ellipsen/>

Damit gezeigt:

#### Erstes Keplersches Gesetz

Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, mit der Sonne (genauer: dem gemeinsamen Schwerpunkt) in einem Brennpunkt.



Es bleibt  
zu zeigen:

### Drittes Keplersche Gesetz

Das Quadrat der Umlaufzeit ist proportional zur dritten Potenz der großen Halbachse.

### Zutaten:

① Zweites Keplersche Gesetz

$$\dot{A} = \frac{1}{2} \frac{L}{\mu}$$

② Fläche einer Ellipse

$$A = \pi a b$$

③ Kleine Halbachse ist geometrisches Mittel aus großer Halbachse und Halbparameter. (Beweis: [Blog](#)).

$$b = \sqrt{a p}$$

④ Halbparameter als Funktion von Drehimpuls, Masse und Potential

$$p = \frac{L^2}{\mu k}$$

⇒ Für Umlaufzeit  $T$  gilt:



$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{L}{\mu} T &\stackrel{\text{①, ②}}{=} \pi a b \stackrel{\text{③}}{=} \pi a^{3/2} \sqrt{p} \\ &\stackrel{\text{④}}{=} \frac{1}{2} \sqrt{p \mu k} \frac{1}{2} T \end{aligned}$$



$$\overset{110}{\frac{1}{2} \sqrt{\rho \mu k} \frac{1}{\rho} T}$$

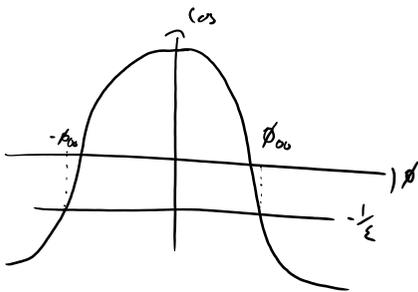
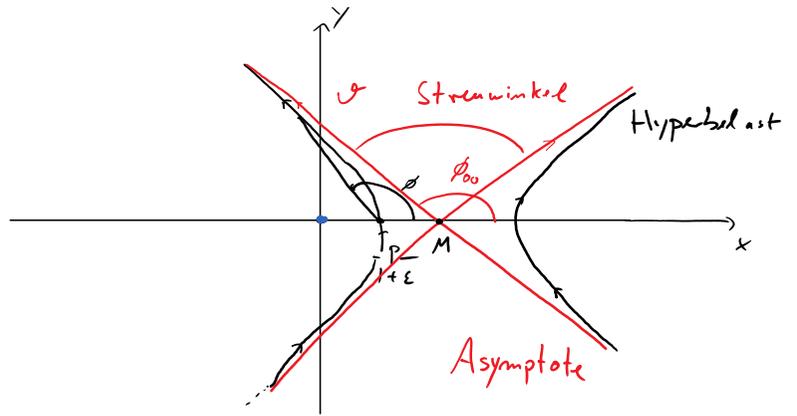
$$\Leftrightarrow T = 2 \pi \sqrt{\frac{\mu}{k}} a^{3/2}$$



### 3.7.2 Hyperbeln, Streutheorie und das Slingshot-Manöver

$$r = \frac{-P}{1 + \epsilon \cos \phi}$$

$$\epsilon > 1$$



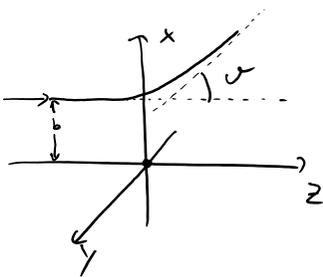
Der Abstand  $r$  zum Ursprung divergiert für  $\cos \phi \rightarrow -\frac{1}{\epsilon}$ . Dadurch konvergieren die Bahnen gegen eine Gerade - die *Asymptote*. Physikalisch entspricht das der Tatsache, dass weit weg vom Kraftzentrum das erste Newtonsche Gesetz für geradlinige Bewegung sorgt.

Die Lösungskurve ist eine Hyperbel, die in zwei Äste zerfällt. Der linke krümmt sich zum Kraftzentrum hin, der rechte davon weg.

Anwendungsbsp.:

- Linker Ast: Das *Slingshot-Manöver*, bei dem sich Raumsonden am Gravitationspotential von Planeten streuen lassen, um Energie für die Reise ins tiefe Sonnensystem zu bekommen. Siehe Hausaufgabe.
- Rechter Ast: *Rutherford-Streuung* von  $\alpha$ -Teilchen an Atomkernen. Siehe unten.

### Begriffe der Streutheorie:



- Input:
- Masse  $\mu$
  - Energie  $E$
  - Potential:  $U(r) = -\frac{k}{r}$
  - Stoßparameter  $b$

- Output:
- Streuwinkel  $\mathcal{J}$ .

$$\leadsto \mathcal{J} = 2 \arctan\left(\frac{k}{2E} \frac{1}{b}\right)$$

$$\Downarrow \\ 2 \arctan \frac{1}{\epsilon}$$

Rechenweg

Geometrisch:  
 $\mathcal{J}$  folgt aus  $\phi_{00}$ , folgt aus  $\epsilon$

Physikalisch:  

$$\epsilon = \frac{\|\vec{A}\|}{k\mu}$$

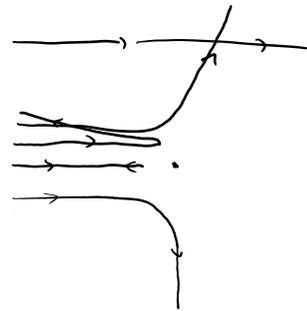
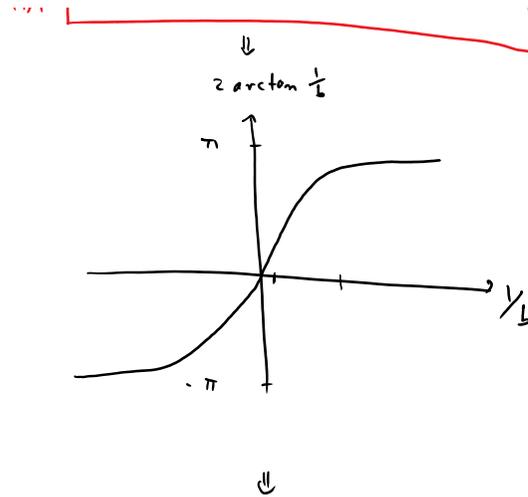
$$\varepsilon = \frac{\|\vec{A}\|}{k\rho}$$

$$\vec{A} = \mu \dot{\vec{r}} \times \vec{L} - \mu k \hat{r}$$

Nutze, dass bei  $t \rightarrow -\infty$ , alle vekt. Größen  $\parallel$  Basisvektoren liegen.

Wir brauchen diesmal keinen Blog-Eintrag zur Geometrie von Hyperbeln. Grund ist, dass wir alleine mit der Analyse des asymptotischen Verhaltens ans Ziel kommen. Der genaue Verlauf des Streuprozesses in der Nähe des Kraftzentrums ist oft physikalisch nicht beobachtbar (z.B. im Rutherford-Experiment), oder wenigstens für die Analyse nicht wichtig.

Glück gehabt!

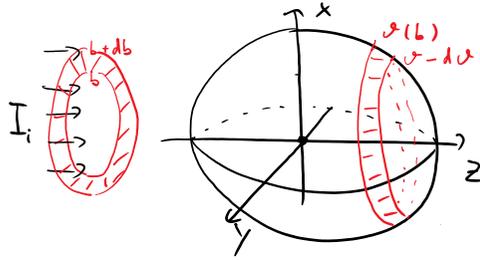


Für kleine Stoßparameter ergeben sich Streuwinkel bis  $\pm \pi \hat{=}$  Rückstreuung.

### 3.7.3 Wirkungsquerschnitt

Intensität

$$I = \frac{\# \text{ Teilchen}}{\text{Fläche} \cdot \text{Zeit}}$$



Kugel mit Radius  $R$ , mit Kugelkoordinaten  $\vartheta, \phi$ .

Messbar ist winkelabh. Intensität

$$I_d(\vartheta, \phi).$$

Anzahl Teilchen pro Zeit durch die beiden roten Flächen ist gleich:

$$I_i \cdot 2\pi b \, db = -2\pi \sin\vartheta \cdot R \, d\vartheta I_d$$

$$\Rightarrow R^2 \frac{I_d(\vartheta, \phi)}{I_i} =: \sigma(\vartheta, \phi)$$

differentielle Wirkungsquerschnitt

$$\Rightarrow \sigma(\vartheta, \phi) = - \frac{b}{\sin\vartheta} \frac{db}{d\vartheta} = \dots$$

↑

$$\left[ \vartheta = 2 \arctan\left(\frac{k}{2E} \frac{1}{b}\right) \right]$$

Vergl. [letzte Lektion](#).

Umformen

$$= \left(\frac{k}{2E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4 \vartheta/2}$$

Wirkungsqu. für Rutherford.

# 4.1 Oszillationen um Gleichgewichtslagen

Klingt banal...

... ist aber enorm wichtig, für:

- praktische Anwendungen
- Struktur der Physik

"Physics is that subset of human experience which can be reduced to coupled harmonic oscillators" -- Michael Peskin

From <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tony/dynamics/class.pdf>

Betrachte  $N$  FHG mit BWG:

$$\ddot{\vec{r}}_i = \frac{1}{m_i} \vec{F}_i(\vec{r}).$$

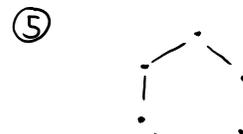
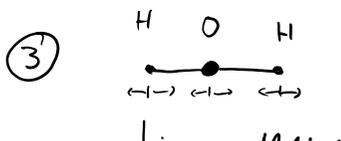
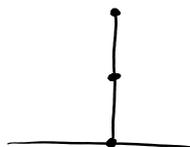
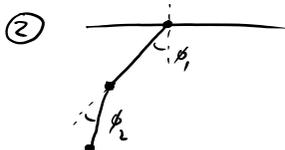
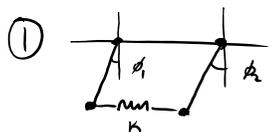
$\vec{x} \in \mathbb{R}^N$  ist Gleichgewichtslage wenn  $\vec{F}(\vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{r}(t) = \vec{x} \quad \forall t$  ist Lsg.

Setze

$$\vec{\delta}(t) = \vec{r}(t) - \vec{x}.$$

Ziel: Verstehen Dynamik von "kleinen"  $\vec{\delta}(t)$ .

Bsp.:

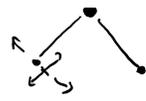


③

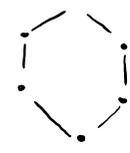


Lineares Molekül

④

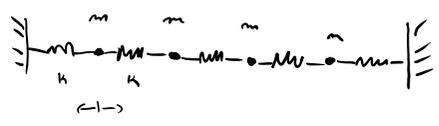


⑤

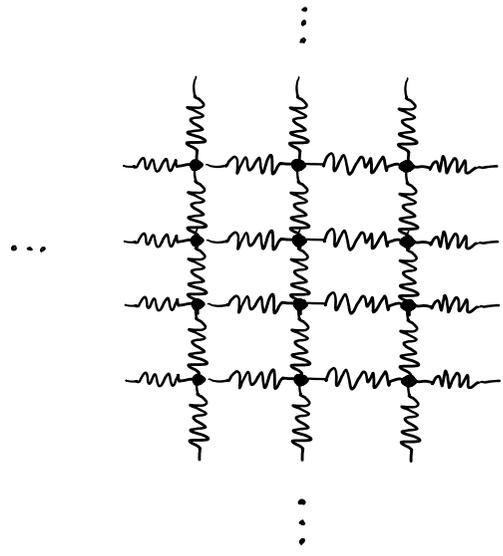


[Quelle: Wikipedia, CC-BY-SA 3.0]

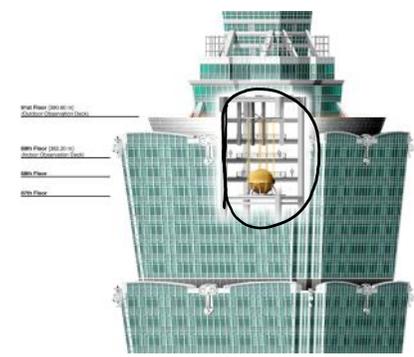
⑥



⑦



⑧



[Quelle: Wikipedia, CC-BY-SA 4.0]

## 4.2 Linearisierte Bewegungsgleichungen (und Quasiteilchen)

Gleichgewichtslage:  $\vec{F}(\vec{x}) = 0$ .

Taylor:  $\frac{1}{m_i} \vec{F}_i(\vec{x} + \vec{\delta}(t)) = \sum_{j=1}^N \frac{1}{m_i} \frac{\partial \vec{F}_i}{\partial r_j}(\vec{x}) \cdot \delta_j + \dots$

nehme an:  $\vec{\delta}$  hinreichend klein,  
dass höhere Ordnungen vernachlässigt werden können.

$\leadsto$  BW Gl.:  $\vec{\ddot{\delta}}(t) = M \vec{\delta}(t)$  mit Matrix  $M_{ij} = \frac{1}{m_i} \frac{\partial \vec{F}_i}{\partial r_j}(\vec{x})$ .

Linearisierte BW Gl. (L).

Löse (L):

Annahme:  $M$  hat vollst. Satz von E.V.  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N\}$ :

$$M \vec{v}_k = \lambda_k \vec{v}_k \quad \text{und} \quad \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N\} \text{ Basis für } \mathbb{R}^N.$$

• Die E.V. heißen Normalmoden.

• Die E.W. " Resonanzfrequenzen.

Entwickel:  $\vec{\delta}(t) = \sum_{k=1}^N c_k(t) \vec{v}_k$

Setze in (L) ein:  $\sum_k \ddot{c}_k(t) \vec{v}_k = \sum_k c_k(t) \lambda_k \vec{v}_k$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{c}_k(t) = \lambda_k c_k(t)} \quad k = 1, \dots, N. \quad (*)$$

$N$  entkoppelte, 1-D, lineare BW Gl.!!!

Leichter geht's nicht!!! :j

Drei Fälle:

Stabiler F.P.



①  $\lambda_k < 0 \rightsquigarrow \omega_k = \sqrt{-\lambda_k}$

"Harmonischer  
Osz."

$\rightsquigarrow$  (\*) gelöst durch

$$c_k(t) = a_k \sin(\omega_k t) + b_k \cos(\omega_k t)$$

Unstabiler F.P.

Bei diesen Lösungen wächst die Auslenkung mit der Zeit. Die Annahme, dass das Kraftgesetz durch seine Taylorentwicklung erster Ordnung beschrieben werden kann, ist daher i.d.R. schnell verletzt. Wenn  $M$  nicht-negative E.V. hat, muss also geprüft werden, ob die Lösungen physikalisch sinnvoll sind, oder ob das Problem nicht in diesem Rahmen behandelt werden kann.



②  $\lambda_k > 0 \rightsquigarrow$  (\*) gelöst durch

$$c_k(t) = a_k e^{\sqrt{\lambda_k} t} + b_k e^{-\sqrt{\lambda_k} t}$$

③  $\lambda_k = 0 \rightsquigarrow$  (\*) gelöst durch

$$c_k(t) = a_k + b_k t.$$

### Zusammenfassung

- Die Dynamik um stabile Fixpunkte herum wird durch unabhängige Schwingungen der Normalmoden beschrieben.
- Diese verhalten sich jeweils wie eindimensionale harmonische Oszillatoren.

### Ausblick

- In der QM können harmonische Oszillatoren nur Energien annehmen, die ein Vielfaches des "Quantums"  $\hbar\omega_k$  sind.
- Diese Anregungen der Normalmoden heißen *Quasiteilchen*.
- *Phononen*, z.B., sind Anregungen der Normalmoden von Kristallschwingungen (kommt bald).

### 4.3 Quadratische Potentiale

Ausgangspunkt bisher: Lineare Kraftgesetze

$$\frac{1}{m_i} \vec{F}_i(\vec{x} + \vec{\delta}) = (M \vec{\delta})_i$$

Frage: Wenn  $\vec{F}$  konservativ ist, was heißt das für das Potential?

Nehme also an:

$$\vec{F}_i = -\frac{\partial}{\partial r_i} U$$

$$\Rightarrow M_{ij} = \frac{1}{m_i} \frac{\partial F_i}{\partial r_j} = -\frac{1}{m_i} \frac{\partial^2 U}{\partial r_i \partial r_j}$$

~) Linearisierte Dynamik hängt nur vom 2. Abl. von  $U$  ab.

Mit

$$U_q(\vec{x} + \vec{\delta}) = \frac{1}{2} \sum_{ij} \delta_i \delta_j \frac{\partial^2 U}{\partial r_i \partial r_j}(\vec{x})$$

ist

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r_i \partial r_j} = \frac{\partial^2 U_q}{\partial r_i \partial r_j}$$

→ "Lineare Kraft  $\in$  Quadratisches Potential"

Spezialfall: Alle Massen sind gleich:  $m_i = m \quad i=1, \dots, N$

$$\Rightarrow M_{ij} = -\frac{1}{m} \frac{\partial^2 U}{\partial r_i \partial r_j} = M_{ji} \Rightarrow M = M^T$$

⇒ Normalmoden können ortho-normal gewählt werden.

• In unimodalen Systemen können ortho-normal gewählt werden.

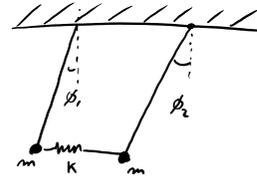
### **Achtung**

Im Allgemeinen können die Normalmoden nicht orthogonal gewählt werden. Ein solcher Fall wird in den Hausaufgaben auftreten.

## 4.4 Gekoppelte Pendel



Quelle: CC-BY



Potential:  $U(\phi_1, \phi_2) = mgl(2 - \cos \phi_1 - \cos \phi_2) + \frac{k}{2} l^2 \left( (\cos \phi_1 - \cos \phi_2)^2 + (\sin \phi_1 - \sin \phi_2)^2 \right)$

Quadratische Näherung:

Nutzen:  $\cos \phi = 1 - \frac{1}{2} \phi^2 + O(\phi^4)$

Nehme an:  $m = g = l = 1$ .

$\sin \phi = \phi + O(\phi^3)$

$$U_q(\phi_1, \phi_2) = \frac{1}{2} (\phi_1^2 + \phi_2^2) + \frac{k}{2} (\phi_1^2 + \phi_2^2 - 2\phi_1\phi_2)$$

$\leadsto M_{ij} = - \frac{\partial^2 U}{\partial \phi_i \partial \phi_j} = \begin{bmatrix} -1-k & k \\ k & -1-k \end{bmatrix}$

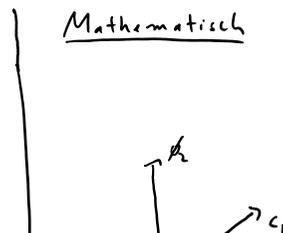
Finde Normalmoden

$M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \leadsto \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \omega_1 = 1$

$M \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1-2k) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \leadsto \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \omega_2 = \sqrt{1+2k}$

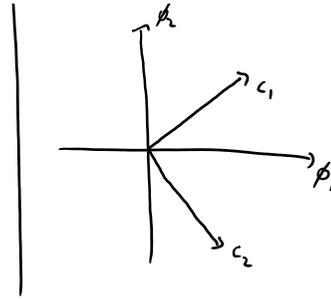
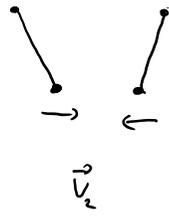
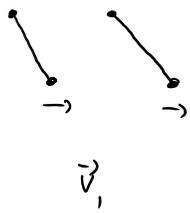
Physikalisch

Mathematisch



Die Matrix

... ..



Die Matrix

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

transformiert in und  
vom Normalmoden.

## 4.4.1 Energietransfer



[Quelle: CC-BY]

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \omega_1 = 1$$

$$\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \omega_2 = \sqrt{1+2k}$$

Anfangswertproblem:

$$\vec{\phi}(0) = 0$$

$$\dot{\vec{\phi}}(0) = \begin{bmatrix} S \\ 0 \end{bmatrix}$$

Im Normalmoden:

$$c_1(t) = a_1 \sin t + b_1 \cos t$$

$$c_2(t) = a_2 \sin \omega_2 t$$

$$\begin{bmatrix} S \\ 0 \end{bmatrix} = c_1(0) \vec{v}_1 + \dot{c}_2(0) \vec{v}_2$$

$$= a_1 \vec{v}_1 + a_2 \omega_2 \vec{v}_2$$

Mit

$$a_1 = \frac{S}{\sqrt{2}}, \quad a_2 = \frac{S}{\sqrt{2}\omega_2}$$

ergibt sich:

$$= \frac{S}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{S}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S \\ 0 \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

Transformiere zurück:

$$\phi_1(t) = \frac{S}{2} \sin(\omega_1 t) + \frac{S}{2\omega_2} \sin(\omega_2 t)$$

Für schwache Kopplung ( $k \ll 1$ ), nähern:  $\frac{1}{\omega_2} = (1+2k)^{-1/2} = 1 - k + \dots \approx 1$ .

$$\approx \frac{S}{2} (\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t))$$

$$= S \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)$$

Schwebung

## 4.4.2 Lissajous-Figuren

Computercode zum Video: siehe [Blog](#).

### Lissajous-Figuren

David Gross — 2020-11-22 — 0 Comments

```
In [5]: import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import animation, rc
import numpy as np
from IPython.display import HTML, display, clear_output

def lissajous(k, periods, online=True):
    #plt.rcParams['figure.figsize'] = (6,4)
    plt.rcParams['figure.dpi']=100
    plt.rcParams['animation.bitrate']=4000

    fig, ax = plt.subplots()

    ax.set_aspect('equal')

    axesRange=np.sqrt(2)
    ax.set_xlim((-axesRange, axesRange))
    ax.set_ylim((-axesRange, axesRange))

    line, = ax.plot([], [], lw=2)

    omega=np.sqrt(1+2*k)      # 2nd frequency
    T=periods*2*np.pi      # max time
    N=int(5*T)              # number of frames in animation
    pf=2                    # points per frame

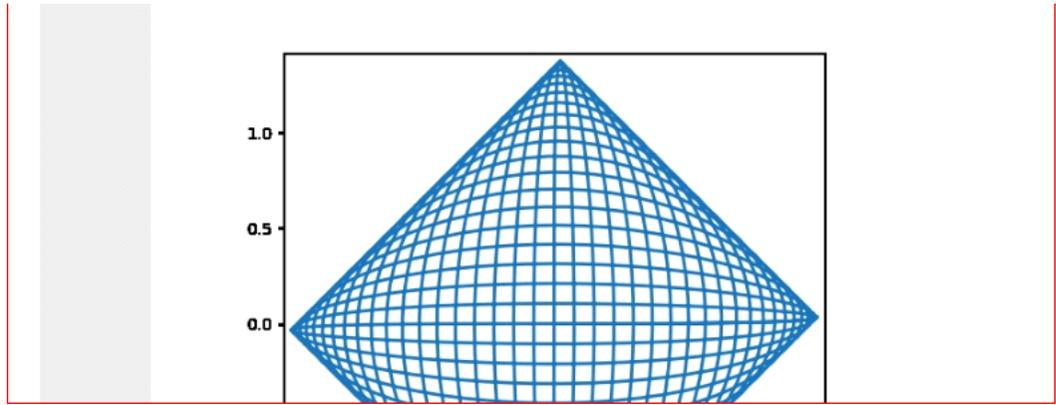
    phis = np.zeros((2,N*pf)) # positions

    def animate(i):
        t = np.linspace(i*T/N, (i+1)*T/N, pf, endpoint=False);
        fromNormalModes = 1/np.sqrt(2)*np.array([[1,1],
[1,-1]])
        phis[:,i*pf:
(i+1)*pf]=fromNormalModes@np.array([np.sin(t),
1/omega*np.sin(omega*t)])
        line.set_data(phis[0,:(i+1)*pf],phis[1,:(i+1)*pf])

        # Show individual frames while rendering.
        # Good for online demonstration, not suitable for web
    export
    if online:
        for i in range(N):
            animate(i)
            display(fig)
            clear_output(wait=True)
            # time.sleep(.1) # Anyway super-slow
    else:
        anim = animation.FuncAnimation(fig, animate,
frames=N, interval=20,
blit=False)
        return HTML(anim.to_html5_video())

In [12]: display(lissajous(0.05125,21, False));
```

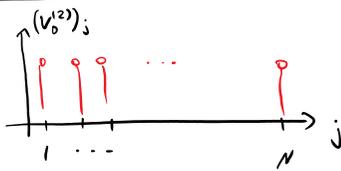






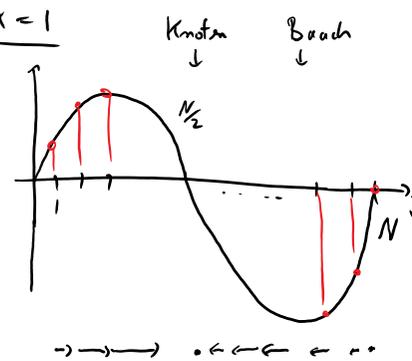
## Normalmoden

$$k=0$$



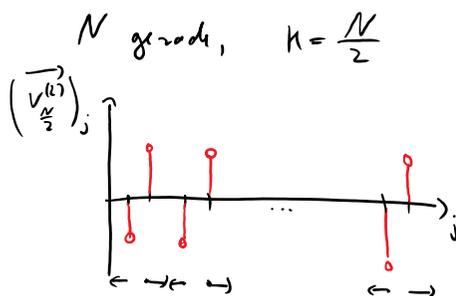
$$\omega_0 = 0$$

$$k=1$$



$$\omega_1 \approx \sqrt{\frac{4k}{m}} \frac{\pi}{N}$$

Stehende Welle mit Wellenzahl  $\frac{2\pi}{N} \cdot k$ .



"Grenzfrequenz"

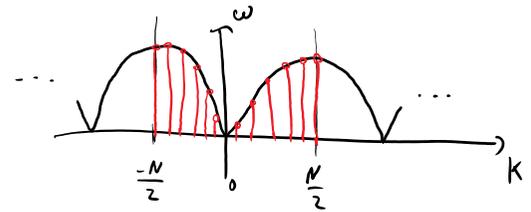
Für eine gerade Anzahl von Teilchen erhält man als höchste

Wellenzahl  $k = \frac{N}{2}$ .

Bei dieser Lsg schwingen benachbarte Teilchen gegeneinander.

Dies verallgemeinert [die zweite Mode der zwei gekoppelten Pendel](#).

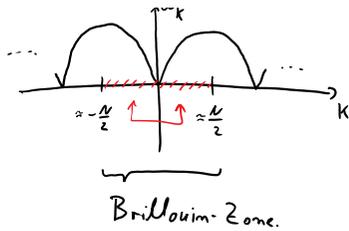
## Dispersionsrelation



Für die lineare Kette ergeben sich Normalmoden, die stehende Wellen mit Wellenzahl  $\frac{2\pi}{N}k$  beschreiben. Der Parameter  $k$  ist hierbei eine ganze Zahl. Die Welle mit räumlicher Wellenzahl  $\frac{2\pi}{N}k$  schwingt in der Zeit mit der Resonanzfrequenz  $\omega_k = \sqrt{\frac{4k}{m}} \left| \sin \frac{\pi}{N} k \right|$ . Dieser Zusammenhang zwischen räumlicher Wellenzahl und zeitlicher Frequenz

wird *Dispersionsrelation* genannt, und ist für das Verhalten der Schwingungen von zentraler Bedeutung. Wir werden uns das später ansehen.





minimieren Bereich die Brillouin-Zone.

Bei der endlichen Kette muss man an den Rändern etwas aufpassen. Wenn  $N$  gerade ist, ist  $\vec{v}_N = \vec{v}_{-N}$  (vergl. die letzte Skizze [hier](#)). Dann darf also nur einer der beiden Vektoren mitgenommen werden. Wenn  $N$  ungerade ist, enthält der Bereich  $k = -\frac{N-1}{2}, \dots, \frac{N-1}{2}$  genau  $N$  unabhängige Moden. (Warum?)

② Finde reelle E.V.

$\omega_k = \omega_{-k} \leadsto$  Linearkomb. von  $\vec{v}_k, \vec{v}_{-k}$  sind ebenfalls E.V.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{v}_k + \vec{v}_{-k})_s = \sqrt{\frac{1}{2N}} \begin{pmatrix} e^{i\frac{2\pi}{N}ks} & + e^{-i\frac{2\pi}{N}ks} \end{pmatrix}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{N}} \cos\left(\frac{2\pi}{N}ks\right)$$

$$= \left(\vec{v}_k^{(2)}\right)_s$$

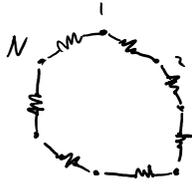
$$\frac{1}{\sqrt{2}i} (\vec{v}_k - \vec{v}_{-k})_s = \dots$$

$$= \left(\vec{v}_k^{(1)}\right)_s$$

Die [zuvor angegebenen](#) stehenden Wellen.

## 4.5.2 Komplexe Darstellung

[Nebene am:  
N ungerade]



$$\Rightarrow \delta_s(t) = \delta(s, t) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} (a_k \sin \omega_k t + b_k \cos \omega_k t) \left( c_k^{(1)} \sin\left(\frac{2\pi}{N} k \cdot s\right) + c_k^{(2)} \cos\left(\frac{2\pi}{N} k \cdot s\right) \right)$$

Beh.: Man kann kann die  $a_n, b_n, c_n^{(1)}, c_n^{(2)}$  ( $k=0, \dots, \frac{N-1}{2}$ ) umrechnen in  
komplexe  $c_k$  ( $k = -\frac{N-1}{2}, \dots, \frac{N-1}{2}$ ) s. d.

$$\begin{aligned} \delta(s, t) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{1}{2} \sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \left( c_k e^{i \frac{2\pi}{N} k s - i \omega_k t} + \overline{c_k} e^{-i \frac{2\pi}{N} k s - i \omega_k t} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k \operatorname{Re} \left( c_k e^{i \frac{2\pi}{N} k s - i \omega_k t} \right) \end{aligned}$$

Bew.: Nicht schwer, aber etwas nervig. Zerlege  $c_k$  und Potenzen in Real- und Imaginäreteil und rechne von unten nach oben...

Interpretation:

$$\textcircled{1} \text{ Summand } \operatorname{Re} c_k e^{i \frac{2\pi}{N} k s - i \omega_k t} = |c_k| \cos\left(\frac{2\pi}{N} k s - \omega_k t + \arg(c_k)\right)$$

beschreibt laufende Welle mit Phasengeschw.  $\frac{\omega_k}{k}$ :

$$\frac{2\pi}{N} k s - \omega_k t = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{2\pi}{N} s}_{\text{Phasengeschwindigkeit}} = \underbrace{\frac{\omega_k}{k}}_{\text{Phasengeschwindigkeit}} \cdot t$$

Ort  $\left[\frac{2\pi}{N} \cdot \text{Gitterplatz}\right]$

$c_k(t)$

$$\textcircled{2} \quad \delta(s, t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k \operatorname{Re} \left( \underbrace{c_k}_{\substack{|c_k|^2 \equiv \\ \text{Anregungsstärke} \\ \text{der } k\text{-ten Mode}}} e^{-i\omega_k t} \underbrace{e^{i\frac{2\pi}{N} k \cdot s}}_{\text{stehende Welle}} \right)$$

Zeitabh.  $\hat{=}$  Phasenfaktor mit Kreisfreq.  $\omega_k$ .

Die Darstellung von  $\delta(s, t)$  als Überlagerung von (räumlicher Mode  $\times$  Anregungsstärke  $\times$  Phasenfaktor mit konstanter Kreisfrequenz) ist für alle Wellenbewegungen relevant. Sie finden Varianten dieses Ausdrucks für Gitterschwingungen (hier), Schwingungen in kontinuierlichen Medien, Lösungen der Schrödingergleichung und den Maxwellgleichungen. In der Quantenfeldtheorie tauchen diese Ausdrücke wieder auf - lediglich die Anregungsstärke wird dann durch einen Operator modelliert, der mit der Anzahl der Quasiteilchen in der Mode zusammenhängt.

$\textcircled{3}$  Für Numerik:

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k c_k(t) e^{i\frac{2\pi}{N} k \cdot s} \quad \text{ist diskrete, inverse Fourier-Transformation von } k \mapsto c_k(t).$$

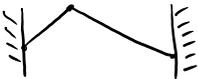
Mehr Information dazu in der nächsten Lektion.

$$\textcircled{4} \quad \begin{aligned} \dot{\delta}(s, t) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k \operatorname{Re} \left( c_k \frac{\omega_k}{i} e^{-i\omega_k t} e^{i\frac{2\pi}{N} k s} \right) \\ &\quad \underbrace{\operatorname{Re} \left( \frac{1}{i} z \right) = \operatorname{Im}(z)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k \omega_k \operatorname{Im} \left( c_k(t) e^{i\frac{2\pi}{N} k s} \right) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$   $\operatorname{Re} \hat{=}$  Verteilung der Auslenkungen

$\operatorname{Im} \hat{=}$  " " " Geschwindigkeiten

### 4.5.3 Anfangswertprobleme und Fouriertransformationen

Bsp.: • Gezupfte Saite 

AWP: Gegeben  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^N$ , finde  $\vec{\delta}(t)$  mit  $\left. \begin{array}{l} \vec{\delta}(0) = \vec{u} \\ \dot{\vec{\delta}}(0) = \vec{v} \end{array} \right\} \text{System von linearen Gl. für } c_k.$

Beh.: Wähle

$$c_k = (\vec{v}_k, \vec{u}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_s e^{-i \frac{2\pi}{N} k \cdot s} u_s$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{\delta}}(0) = 0, \quad \vec{\delta}(0) = \vec{u}.$$

$\rightarrow c(k)$  ist die diskrete Fourier-Transf. von  $u(s)$ .

Bew.: ① Zeige  $\dot{\vec{\delta}}(0) = 0$

$$\begin{aligned} \dot{\delta}(s, 0) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k \omega_k \operatorname{Im} (c_k e^{i \frac{2\pi}{N} k s}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{1}{2} \sum_k \omega_k \operatorname{Im} (c_k e^{i \frac{2\pi}{N} k s} + \overline{c_k} e^{-i \frac{2\pi}{N} k s}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Nutze:

$$\vec{v}_{-k} = \overline{\vec{v}_k}$$

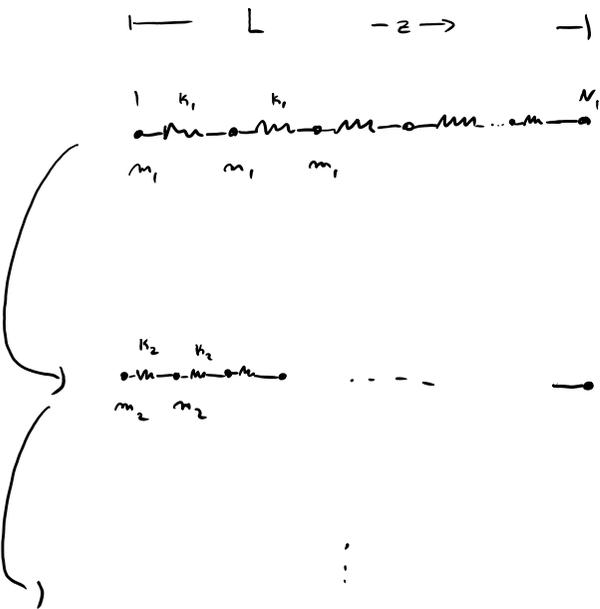
$$\Rightarrow c_{-k} = (\vec{v}_{-k}, \vec{u}) = \overline{(\vec{v}_k, \vec{u})} = \overline{c_k}$$

② Zeige:  $\vec{\delta}(0) = \vec{u}$ .

$$\begin{aligned} \delta(s, 0) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k \operatorname{Re} (c_k e^{i \frac{2\pi}{N} k s}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{1}{2} \sum_k (c_k e^{i \frac{2\pi}{N} k s} + \overline{c_k} e^{-i \frac{2\pi}{N} k s}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k c_k e^{i \frac{2\pi}{N} k s} \\ &= u(s) \end{aligned}$$

□

#### 4.5.4 Kontinuumslimites



Renormalisierte Parameter:

$$N_i = 2 N_{i-1}$$

$$m_i = \frac{1}{2} m_{i-1}$$

$$\Delta_i = \frac{L}{N_i} = \frac{1}{2} \Delta_{i-1}$$

$$k_i = 2 k_{i-1}$$

Verschiebungsfeld

$$d_i(z, t) = \underbrace{\int_{[0, L]}^{(i)}}_{\text{ite Modell}} \left( \left[ \frac{z}{\Delta_i} \right], t \right)$$

BW Gl.:

$$m_i \ddot{d}_i(z, t) = k_i \left( d_i(z - \Delta_i, t) - 2 d_i(z, t) + d_i(z + \Delta_i, t) \right)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{m_i}{\Delta_i}}_{\rho} \ddot{d}_i(z, t) = \underbrace{(k_i \Delta_i)}_E \frac{d_i(z + \Delta_i, t) - d_i(z, t)}{\Delta_i} - \frac{d_i(z, t) - d_i(z - \Delta_i, t)}{\Delta_i}$$

Elastizitätsmodul

$$\rightarrow_{(i \rightarrow \infty)} \rho \frac{d^2}{dt^2} d(z, t) = E \frac{d^2}{dz^2} d(z, t)$$

$$\Leftrightarrow \left[ \frac{d^2}{dt^2} - \frac{E}{s} \frac{d^2}{dz^2} \right] d(z,t) = 0$$

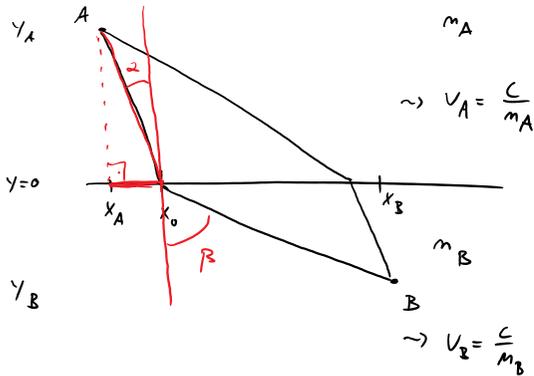
gelöst durch

$$d(z,t) = e^{ikz - i\omega_n t}$$

mit  $\omega_k = \sqrt{\frac{E}{s}}$ .

Gittermodell  $\leftrightarrow$  Feldtheorie

5.1 Vorbereitung 1: Das Fermatsche Prinzip



Fermat: Der Pfad wird angenommen, der die Zeit von  $A \rightarrow B$  minimiert.

$$\rightarrow T(x_0) = \frac{m_A}{c} \sqrt{y_A^2 + (x_0 - x_A)^2} + \frac{m_B}{c} \sqrt{y_B^2 + (x_B - x_0)^2}$$

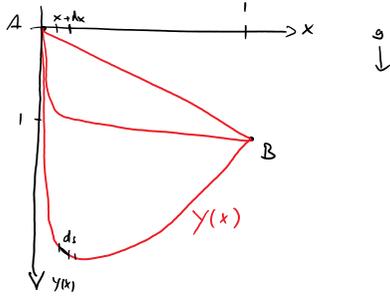
Stationaritätsbed.:

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{d}{dx_0} T(x_0) = \frac{m_A}{c} \frac{(x_0 - x_A)}{\sqrt{y_A^2 + (x_0 - x_A)^2}} - \frac{m_B}{c} \frac{(x_B - x_0)}{\sqrt{y_B^2 + (x_B - x_0)^2}}$$

$$= \frac{1}{c} (m_A \sin \alpha - m_B \sin \beta)$$

$$\Leftrightarrow m_A \sin \alpha = m_B \sin \beta$$

5.2 Vorbereitung 2: Die Brachistochrone



$$g = m = 1$$

$$U = -mgy = -y$$

$$E = 0$$

Frage: Auf welcher Bahn gleitet eine Masse am schnellsten von  $A \rightarrow B$ ?

Zunächst: Finde Durchlaufzeit  $T[y(\cdot)]$

$$T[y(\cdot)] = \int_0^1 \frac{ds}{v(x)} dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{1+y'^2}{2y}} dx$$

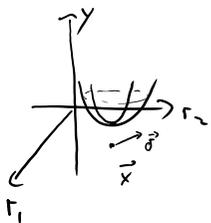
$$\begin{aligned} T &= \int dt \\ &= \int \frac{dt}{dx} dx \\ &= \int \frac{ds}{dx} \frac{dt}{ds} dx \\ &= \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{v} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(x) &= \sqrt{\frac{2(E - U(x))}{m}} & ds &= \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \\ &= \sqrt{2y} & \Rightarrow \frac{ds}{dx} &= \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \end{aligned}$$

Wie findet man nun  $y(\cdot)$ 's, für die  $T[y(\cdot)]$  minimal ist? Die allgemeine Theorie kommt als nächstes, die Brachistochrone rechnen Sie als Hausaufgabe aus.

### 5.3 Vorbereitung 3: Stationäre Punkte und Gradienten

Erinnerung: Stationäre Pkte von Fkt.  $S: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ .



Punkt  $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$  ist stationär, wenn  $\forall$  Variationen  $\vec{\delta} \in \mathbb{R}^N$  gilt

$$0 = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} S'(\vec{x} + \varepsilon \vec{\delta}) \quad (S)$$

Das ist aber gleich

$$\sum_i \frac{\partial S'}{\partial r_i}(\vec{x}) \delta_i = (\vec{\nabla} S'(\vec{x}), \vec{\delta})$$

und daher ist (S) äquivalent zu (G)

$$\vec{\nabla} S(\vec{x}) = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad \frac{\partial S}{\partial r_i}(\vec{x}) = 0.$$

Nun für Funktionale:

$$S: (\text{Funktionen } \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\vec{q}(\cdot) \quad \mapsto S[\vec{q}(\cdot)]$$

Beschränke auf folgende Klasse von Funktionale:

① Wähle Funktion

$$L: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

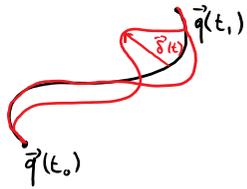
$$\vec{F} \times \vec{v} \times t \quad \mapsto L(\vec{F}, \vec{v}, t)$$

[ In der Mechanik üblicherweise: "Ort", "Gesch.", "Zeit" ]

② Wähle auch  $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ .

$$\rightarrow \underline{\text{Def.}}: S[\vec{q}(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_1} L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t) dt$$

Definiere Stationarität bei  $\vec{q}(\cdot)$ : Verlangt, dass für jede Variation  $\vec{\delta}(\cdot)$  mit  $\vec{\delta}(t_0) = \vec{\delta}(t_1) = 0$  gilt:



$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} S[\vec{q}(\cdot) + \varepsilon \vec{\delta}(\cdot)] = 0$$

(Analog zu (S)).

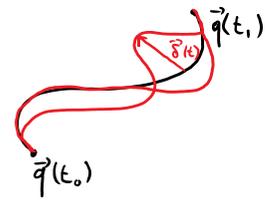
Ziel: Finde Analogon zum "Gradientenkriterium" (G) für Funktionale.

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} S[\vec{q}(\cdot) + \varepsilon \vec{\delta}(\cdot)] \right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_0}^{t_1} \sum_i \left[ \frac{\delta S}{\delta q_i} \right] \delta_i(t) dt$$

↑ "Funktionalableitung"

## 5.4 Die Euler-Lagrange-Gleichung

$$S[\vec{q}(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_1} L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t) dt$$



$$\vec{\delta}(t_0) = \vec{\delta}(t_1) = 0.$$

$$0 \stackrel{!}{=} \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} S[\vec{q}(\cdot) + \varepsilon \vec{\delta}(\cdot)]$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left[ \sum_i \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_i}(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t)}_{\frac{\partial L}{\partial q_i}} \delta_i(t) + \sum_i \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t)}_{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}} \dot{\delta}_i(t) \right] dt$$

Partielle Integration

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta_i dt = - \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta_i dt + \underbrace{\left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta_i \right]_{t_0}^{t_1}}_{=0}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \sum_i \underbrace{\left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)}_{=: \frac{\delta S}{\delta q_i}} \delta_i dt$$

$\Rightarrow$  Gradientenkriterium für Funktionale:  $\vec{q}(\cdot)$  stationär für  $S'$

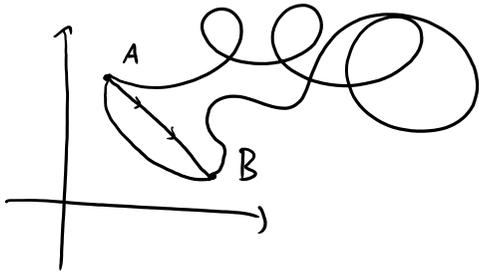
$$\Leftrightarrow \frac{\delta S}{\delta q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Euler  
- Lagrange  
- Gleichung.

## 5.5 Anwendung 1: Geodäten

$$\vec{q}(\cdot) \text{ stationär} \iff \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Frage: Was ist kürzeste Verbindung zwischen A und B?



Dazu: Betrachte Kurven  $q(t)$  mit  $\vec{q}(0) = A$ ,  $\vec{q}(1) = B$ .

$$\begin{aligned} S[\vec{q}(\cdot)] &= \text{Länge von } \vec{q}(\cdot) \\ &= \int_0^1 \left\| \frac{d}{dt} \vec{q}(t) \right\| dt \\ &= \int_0^1 L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t) dt \end{aligned}$$

$$\text{mit } L(\vec{r}, \vec{v}, t) = \|\vec{v}\| = \left( \sum_{i=1}^N v_i^2 \right)^{1/2}$$

Für ELG:

$$\frac{\partial L}{\partial r_i} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{v_i}{\|\vec{v}\|}$$

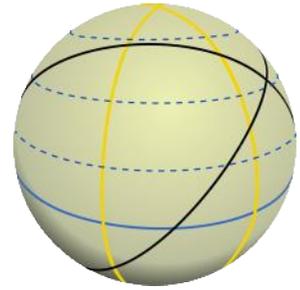
$$0 = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{q_i(t)}{\|\vec{q}(t)\|} \quad i = 1, \dots, N$$

$$\iff \underbrace{\frac{\vec{q}(t)}{\|\vec{q}(t)\|}}_{\text{Richtung der Tangente}} = \text{const.}$$

Verbindungslinien zwischen zwei Punkten, die bezüglich der Gesamtlänge stationär sind, heißen *Geodäten*. Geodäten im euklidischen Raum sind also einfach Geraden - keine sehr



Verbindungslinien zwischen zwei Punkten, die bezüglich der Gesamtlänge stationär sind, heißen *Geodäten*. Geodäten im euklidischen Raum sind also einfach Geraden - keine sehr überraschende Erkenntnis. Geodäten kann man aber auch auf gekrümmten Körpern definieren. Auf der Kugel heißen sie *Großkreise* - das sind, im Wesentlichen, die Bahnen, auf denen Flugzeuge fliegen. Großkreise zeigen, dass eine Bahn, die stationär bezüglich des Längenfunctionals ist, nicht unbedingt ein globales Minimum ist: Von Köln nach Berlin kann man auch über Atlantik und Pazifik auf einem Großkreis reisen.



[Quelle: [Wikipedia](#), Gemeinfrei]

In der allgemeinen Relativitätstheorie wird gezeigt, dass Licht sich auf Geodäten in der vierdimensionalen Geometrie der Raumzeit bewegt. Spätestens dann wird die Rechnung oben interessanter....

5.6 Anwendung 2:  
Bewegungsgleichungen für  
Konservative Systeme

$$\vec{q}(\cdot) \text{ stationär} \iff \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Ziel hier: Für konservative mechanischen Systeme sind die Lösungen der Newtongleichungen genau diejenigen Bahnkurven, die stationär für folgendes Funktional sind:

$$S[\vec{q}(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_1} L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t)) dt \quad \text{"Wirkung"}$$

$$L(\vec{r}, \vec{v}) = T(\vec{v}) - U(\vec{r}) \quad \text{Lagrange-Fkt.}$$

$$T(\vec{v}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad \text{kinetische Energie}$$

$$U(\vec{r}) \quad \text{Potential, also } F_i(\vec{r}) = - \frac{\partial}{\partial r_i} U(\vec{r})$$

Beweis:  $\frac{\partial L}{\partial r_i} = - \frac{\partial U}{\partial r_i} = F_i(r) \quad \text{Kraft}$

$$\frac{\partial L}{\partial v_i} = m_i v_i \quad \text{Impuls}$$

$$\leadsto \text{ELG für } \vec{q}(\cdot): \quad F_i(\vec{q}(t)) - \frac{d}{dt} m_i \dot{q}_i(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow F_i(\vec{q}(t)) = m_i \ddot{q}_i(t) \quad \text{Newtongleichung!}$$

## 5.7 Koordinatentransformationen

Newtongleichung in kartesischen Koordinaten  $\vec{r}$  für konservative Kräfte:

$$(N) \quad m_i \ddot{r}_i = - \frac{\partial}{\partial r_i} U$$

Oft möchte man ein an das Problem angepasstes Koordinatensystem  $\vec{s}(\vec{r})$  wählen.

Bsp.: Polarkoordinaten

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \vec{s} = \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix}, \quad \vec{r}(\vec{s}) = r \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}.$$

Ziel hier: Zeige die dazu benötigten Schritte explizit.

Dazu:

$$\bullet \quad \frac{d}{dt} r_i(t) = \frac{d}{dt} r_i(\vec{s}(t)) = \sum_j \underbrace{\frac{\partial r_i}{\partial s_j}}_{\text{Jacobi-Matrix von } \vec{r}(\vec{s}) \text{ "Kontravariant"}} \frac{d}{dt} s_j(t)$$

$$\bullet \quad \frac{d^2}{(dt)^2} r_i(t) = \dots = \sum_j \frac{\partial r_i}{\partial s_j} \frac{d^2}{(dt)^2} s_j(t)$$

$$\bullet \quad \frac{\partial}{\partial r_i} = \sum_j \underbrace{\frac{\partial s_j}{\partial r_i}}_{\text{Transponierte Jacobi-Matrix von } \vec{s}(\vec{r}) \text{ "Kovariant"}} \frac{\partial}{\partial s_j}$$

Transponierte Jacobi-Matrix von  $\vec{s}(\vec{r})$ . "Kovariant"

$$\Rightarrow \quad m_i \sum_j \frac{\partial r_i}{\partial s_j} \ddot{s}_j = - \sum_j \frac{\partial s_j}{\partial r_i} \frac{\partial}{\partial s_j} U$$

Also, Rezept:

1. Drücke das Potential in neuen Koordinaten aus
2. Berechne Jacobi-Matrizen
3. Forme ko- und kontravariante Vektoren entsprechend um

**Platzhalter:** Diese Seite stammt aus den Notizen des letzten Durchgangs der VL. Ich will dazu kein Video aufnehmen, weil das Thema im Weiteren nicht benötigt wird, und weil ich Ihnen nur ein Gefühl für die Konzepte geben möchte, wofür eine Diskussion besser geeignet ist. Diese Seite dient als Platzhalter für eine der Online-Sitzungen.

In der Physik ist die Notation für effizientes Rechnen optimiert. In der Mathematik bevorzugt man eine Notation, die die geometrische Interpretation der Objekte in den Vordergrund stellt.

Beide Herangehensweisen haben ihre Berechtigung. Idealerweise versteht man sie beide - oder zumindest eine gut, und die andere in Ansätzen.

In dieser VL benutzen wir die physikalisch übliche Notation. Einige Konzepte sind aber viel leichter zu verstehen, wenn man die Grundideen der mathematischen Begriffsbildung kennt. (Beispiele: Warum ist die Euler-Lagrange-Gleichung koordinatenunabhängig? Was ist genau mit  $\vec{r}$  gemeint - ein Punkt, eine Funktion der Zeit, eine Funktion anderer Koordinaten? Frage aus der VL: Was ist der Unterschied zwischen einer "Invariante" und einer "Konstante"?).

In diesem Kapitel werde ich versuchen, ein erstes Gefühl für die mathematische Konvention zu vermitteln. Wer das hilfreich findet, dem empfehle ich das Büchlein "Vektoranalysis" von Jänich. Einige werden von diesem Kapitel eher noch mehr verwirrt sein. Kein Problem - alles hier ist optional und wird im Folgenden nicht als Wissen vorausgesetzt.

Physik

$\vec{r}$  kann sein:

- (1) Ein Punkt im Raum:  $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$
- (2) Eine Bahnkurve:  $\vec{r}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto \vec{r}(t)$
- (3) Ein Koordinatenwechsel. z. B.:  $\vec{r}: \mathbb{R}_+ \times [0, \pi) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$

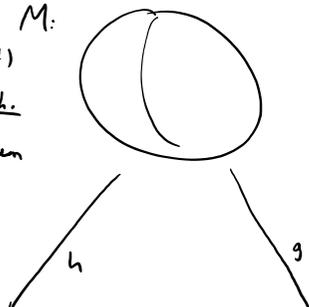
$$\begin{pmatrix} r \\ \vartheta \\ \phi \end{pmatrix} \mapsto r \begin{pmatrix} \sin \vartheta \sin \phi \\ \sin \vartheta \cos \phi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} = \vec{r}(r, \vartheta, \phi)$$

(4) Ein Variablenname:  $V = V(\vec{r}), \frac{\partial V}{\partial r_j}$ .

⋮

Mathematik

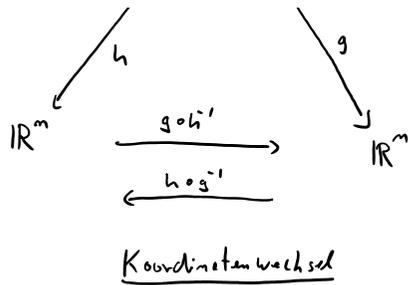
Punktmenge  $M$ :  
(Mannigfaltigkeit)  
Existiert unabh.  
von Koordinaten



"die Erde"  $\leadsto m=3$

Koordinatenfunktionen

$$h: M \rightarrow \mathbb{R}^m \quad m \mapsto h(m) \in \mathbb{R}^m$$

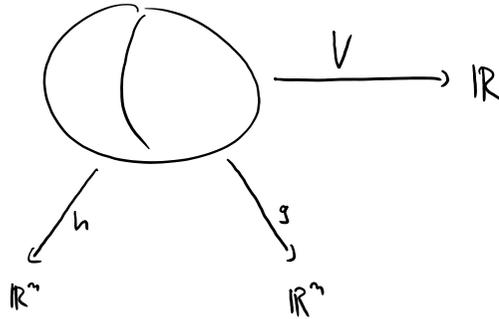


Koordinatenfunktionen

$$h: M \rightarrow \mathbb{R}^m \quad m \mapsto h(m) \in \mathbb{R}^m$$

Bsp:  $h$ : Kartesische Koordinaten

$g$ : Kugelkoordinaten



(abstrakte) Skalare Fkt.

$$V: M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$m \mapsto V(m)$$

Beg. Koordinaten:

$$V_h = V \circ h^{-1}, \quad V_g = V \circ g^{-1}, \dots$$

Transformationseigenschaften:

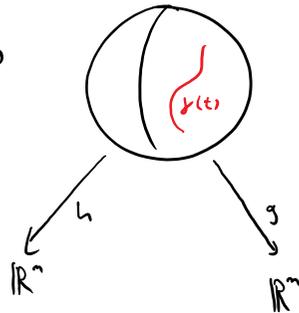
$$V_h = V_g \circ (g \circ h^{-1})$$

(abstrakte)

Bahnkurven

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\gamma} M$$

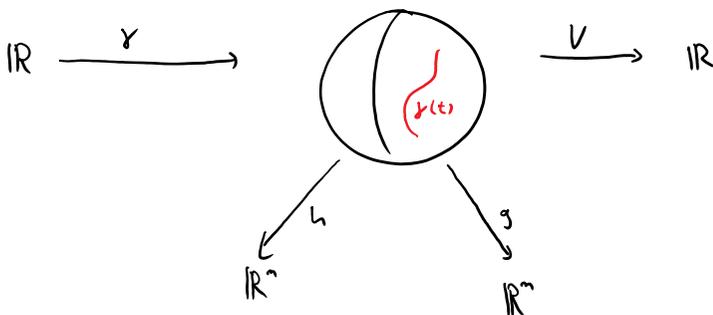
$$t \mapsto \gamma(t) \in M$$



$$\gamma_h(t) = h \circ \gamma(t)$$

$$\gamma_g(t) = g \circ \gamma(t)$$

$$\gamma_h(t) = (h \circ g^{-1}) \circ \gamma_g(t)$$



Skalare Fkt., ausgewertet entlang einer Bahnkurve

$$V \circ \gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Komplett koordinatenfrei! ;)

[

Oder, schwieriger, in Koordinaten:

$$V \circ \gamma = V \circ (h^{-1} \circ h) \circ \gamma$$

$$= V_h \circ \gamma$$

•  $V$  ist konstante wenn  $v$  wenn  $dV(\dot{\gamma}(t)) = 0$

$$\begin{array}{c} \mathbb{R} \\ \mathbb{R}^n \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} V \circ \gamma = V \circ (h^{-1} \circ h) \circ \gamma \\ = V_h \circ \gamma_h \end{array} \right\}$$

•  $V$  ist kovariant von  $\gamma$ , wenn  $\frac{d}{dt} V \circ \gamma(t) = 0$ .  
(also, wenn  $V(\gamma(t)) \in \mathbb{R}$  eine Konstante ist).

Zusammenfassung:

Es gibt zwei große Unterschiede:

- In der Notation der Physik wird nicht deutlich zwischen einer Funktion und ihrem Wert unterschieden. Also: Punkte, Koordinatenfunktionen, Bahnkurven, Koordinatenwechsel usw. bekommen alle das gleiche Symbol, nämlich  $r$ .
- In der Physik gibt es schwieriger, über abstrakte Objekte (Punkte, Kurven, skalare Funktionen) unabhängig von einer Koordinatendarstellung zu reden.

Daher fallen in der physikalischen Notation viele Konzepte zusammen, die in der Mathematik auseinandergehalten werden. Die Tabelle unten gibt einige Beispiele.

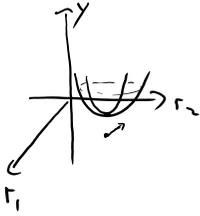
Math.	Physik	
$m \in M$	$\vec{r}$	Punkt im Raum
$h: M \rightarrow \mathbb{R}^n$	$\vec{r}$	Koordinatenfunktion
$g: M \rightarrow \mathbb{R}^m$	$\vec{r}'$	andere "
	$\vec{q}$	" " (wenn sie nicht linear von $\vec{r}$ abhängt)
$x = h(m) \in \mathbb{R}^n$	$\vec{r}$	Koordinaten eines Punktes
$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$	$\vec{r}, \vec{r}(t), \vec{r}(\cdot)$	(Bahn-) Kurve
$\gamma(t) \in M$	$\vec{r}, \vec{r}(t)$	Punkt auf Bahnkurve
$h \circ g^{-1}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$	$\vec{r}, \vec{r}(\vec{r}')$	Koordinatenwechsel
	$\vec{r} = \underline{\Phi}(\vec{r}')$	" , an guten Tagen.
$V: M \rightarrow \mathbb{R}$	$V, V(\vec{r})$	skalare Fkt.
$V(m) \in \mathbb{R}$	$V, V(\vec{r})$	Wert der Fkt. an einem Punkt

## 5.8 Invarianz der Euler-Lagrange-Gleichung

Erinnerung an die Erinnerung

Erinnerung:

$S: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  stationär bei Punkten mit



$$\vec{\nabla}^{(r)} S = 0.$$

Betrachte nun neue Koordinaten  $\vec{s}(r)$

Zwar ist

$$\vec{\nabla}^{(r)} S \neq \vec{\nabla}^{(s)} S,$$

aber

$$\vec{\nabla}^{(r)} S = 0 \Leftrightarrow \vec{\nabla}^{(s)} S = 0.$$

Bew.:

$$\frac{\partial}{\partial r_i} S = \sum_j \frac{\partial s_j}{\partial r_i} \frac{\partial}{\partial s_j} S$$

Jacobi-Matrix vom Koordinatenwechseln per Def. invertierbar

Aber Bild eines Vektors unter inv. Matrix = 0

$\Leftrightarrow$  Vektor = 0. □

Also: Gradienten müssen unter Koordinatenwechsel kovariant transformiert werden - es sei denn, man testet nur ob sie Null sind. Daher führen Stationaritätsprinzipien auf koordinateninvariante Bedingungen.

Für ELG

Um den Beweis auf Funktionale anwenden zu können, müssen wir ausrechnen, wie sich Funktionalableitungen unter Koordinatenwechsel verhalten. Es stellt sich heraus, dass sie sich genau wie Gradienten transformieren - und damit der Beweis oben direkt übertragen werden kann.

Beh.: 
$$\frac{\delta S}{\delta r_i} = \sum_j \frac{\partial s_j}{\partial r_i} \frac{\delta S'}{\delta s_j} .$$

Anmerkung

Im ELG-VL unterschieden:

- Koordinaten  $\vec{r}, \vec{v}$
- Kurven  $\vec{q}(\cdot)$ , Tangenten  $\dot{\vec{q}}(t)$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial v_i} (\dot{\vec{q}}(t))$$

Ab jetzt: Nutze  $\vec{r}$   
für alles.

Bew.: 
$$\frac{\delta S}{\delta r_i} = \frac{\partial L}{\partial r_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}$$

• 
$$\frac{\partial L}{\partial r_i} = \sum_j \frac{\partial s_j}{\partial r_i} \frac{\partial L}{\partial s_j}$$

• 
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = \sum_j \underbrace{\frac{\partial \dot{s}_j}{\partial \dot{r}_i}}_{\dot{s}_j} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}_j} = \sum_j \frac{\partial s_j}{\partial r_i} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}_j}$$

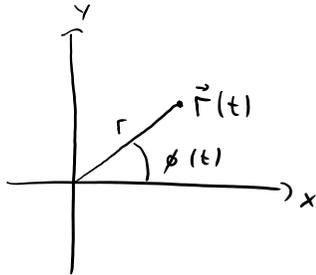
$$\dot{s}_j = \sum_i \frac{\partial s_j}{\partial r_i} \dot{r}_i$$

Nun einfach die Zeitableitung an der Jacobi-Matrix vorbeiziehen und die Matrix dann ausklammern. Wir erhalten die behauptet Transformation der Funktionalableitung.

□

5.9 Beispiel: Polarkoordinaten für  
Zentralkräfte

$$N=2, \quad m_1=m_2=\mu, \quad U=U(r)$$



$$T(\dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2} \mu \|\dot{\vec{r}}\|^2$$

$$\leadsto T(\dot{r}, \dot{\phi}) = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2)$$

$$L = T - U$$

ELG:

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \mu r^2 \dot{\phi}$$

$$\frac{d}{dt} \underbrace{(\mu r^2 \dot{\phi})}_l = 0$$

Allgemein

Ein Koordinate  $s_i$  mit  $\frac{\partial L}{\partial s_i} = 0$  heißt zyklisch.

Die Ableitung  $\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_i}$  heißt verallgemeinerte Impuls.

ELG  $\Rightarrow$  Koordinate zyklisch, dann ist " " EHG.

$$\frac{\partial L}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} U + \underbrace{\mu r \dot{\phi}^2}_{\frac{l^2}{\mu r^3}} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \underbrace{U + \frac{l^2}{2\mu r^2}}_{U_{\text{eff}}(r)} \right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \mu \dot{r} \quad \text{"Radialimpuls"}$$

=>

$$\mu \ddot{r} = - \frac{\partial}{\partial r} U_{\text{eff}}(r)$$

[Vergl. unsere [vorhergehende Rechnung](#)]

## 6.1 Zwangsbedingungen

Wir interessieren uns für Teilchen, deren Bewegungsfreiheit durch *Zwangsbedingungen* eingeschränkt ist.

Bsp.:

①



Pendel Massepunkt mit

- bewegt sich in der Ebene
- Abstand  $l$  zu einem Fixpunkt = const.

②



Starrer Körper

$n$  Massen, mit Koordinaten

$$\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n \in \mathbb{R}^3$$

mit Verbindungsvektoren

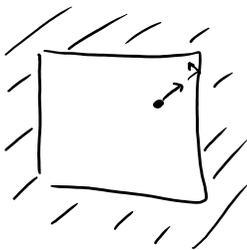
$$\vec{d}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$$

und Bedingungen:

$$(\vec{d}_{ij}, \vec{d}_{ij}) = \text{const.}$$

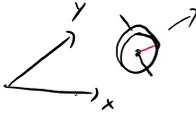
( $\hat{=}$  Abstände und Winkel zwischen Teilchen sind konstant).

③



Teilchen im Kasten

④



Rad in der Ebene.

Beschrieben durch:

- Ort
- Richtung
- Drehwinkel

Ortsveränderung nur entlang Richtung möglich.

Aufgaben:

①

Wie kann man Bewegungsgleichungen für Systeme unter Zwangsbedingungen finden?

"Wie?"

Möglichst so,

- dass nur ein minimaler Satz von Freiheitsgrade beschrieben werden muss; und so
- dass man die physikalischen Mechanismen, die Bewegung einschränken, nicht modellieren muss.

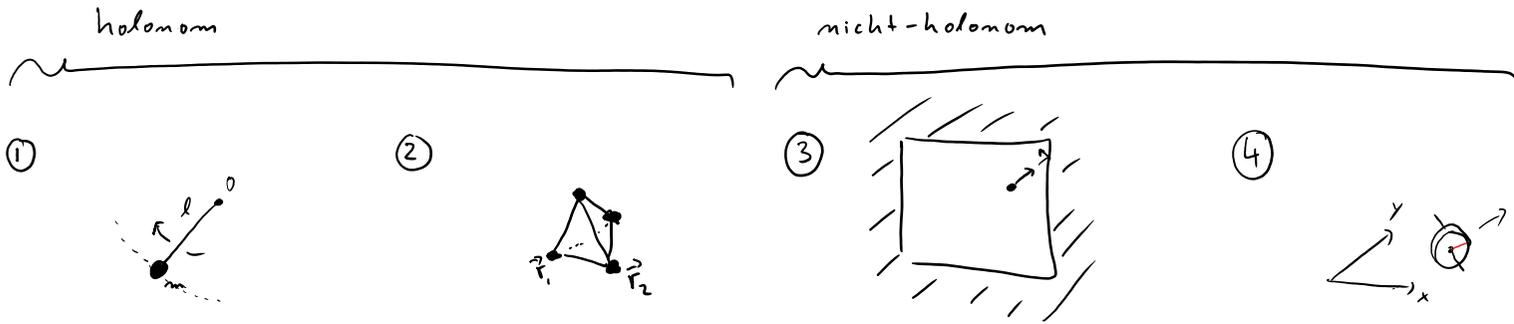
②

Optionaler Konsistenzcheck:

"Warum?"

Zeige, dass die im ersten Schritt entwickelte Methode zumindest näherungsweise aus den uneingeschränkten Bewegungsgleichungen ableitbar ist.

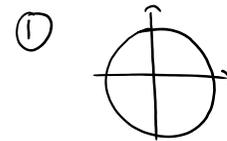
## 6.2 Holonome Zwangsbedingungen



Ohne ZB: Konfigurationsraum ist  $\mathbb{R}^{3m}$ .

In Bsp. ① - ③ schränken die ZB die möglichen Konfigurationen auf eine Menge  $M \subset \mathbb{R}^{3m}$  ein.

In Bsp. ①, ② ist  $M$  unverändert.



ZB dieser Art heißen holonom.

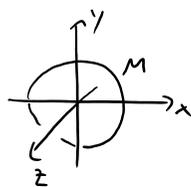
Für holonome Systeme: zwei Möglichkeiten  $M$  zu beschreiben.

① implizit durch ZB.

$$M = \text{gemeinsamen Nullstellen von Fkt. } f_1, \dots, f_k : \mathbb{R}^{3m} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$= \left\{ \vec{r} \in \mathbb{R}^{3m} \mid \underbrace{f_1(\vec{r}) = \dots = f_k(\vec{r}) = 0}_{\text{ZB}} \right\}$$

Bsp.: ①



$$f_1(x, y, z) = z$$

$$f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - l^2$$

②

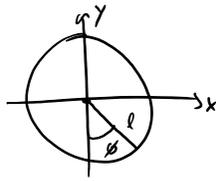


$$f_{ij}(\vec{r}) = (\vec{r}_i - \vec{r}_j, \vec{r}'_i - \vec{r}'_j) - \underbrace{c_{ij}}_{\text{Konstanten}}$$

② Explizit durch Koordinaten

Also einen minimalen Satz  $q_1, \dots, q_N$  von Parametern, die Konfig. eindeutig festlegen.

Bsp.: ①



$M = \text{Kreis}$

$N = 1$

$q_1 = \phi$

②



$M = \text{Kreis} \times \text{Kreis} = \text{Torus}$

$N = 2$

$q_i = \phi_i$



③



Konfig.: Ort des S.P.  $\times$  Rotation

$M = \mathbb{R}^3 \times SO(3)$

$N = 3 + 3$

$q_1, q_2, q_3 = \text{Kart. Koordinaten des S.P.}$

$q_4, q_5, q_6 = \text{Euler-Winkel}$

## 6.3 Das eingeschränkte Stationaritätsprinzip

Gegeben: System mit holonomen  
z.B.

Frage: Was sind die BW Gl.?

①



②



Postulat:

"Eingeschränkte Stationaritätsprinzip"

Diejenigen Bahnen sind physikalisch, für die die Wirkung bzgl. Variation in  $M$  stationär ist.

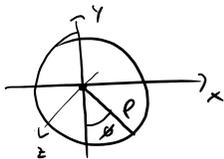
Rezept

① Wähle Koordinaten  $q_1, \dots, q_N$  auf  $M$ .

② Drücke Lagrange-Fkt. in  $q_i$  aus.

③ ELG:  $\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad i = 1, \dots, N \quad (\leq 3m)$

Bsp.:



①  $q_1 = \phi$

②  $T(\dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2} m \|\dot{\vec{r}}\|^2$   
 $U(\vec{r}) = mgy$

$$\vec{r} = l \begin{pmatrix} \sin \phi \\ -\cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\leadsto L(\phi, \dot{\phi}) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\phi}^2 + mgl \cos \phi$

③  $\frac{\partial L}{\partial \phi} = -mgl \sin \phi \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = ml^2 \ddot{\phi}$

$$\leadsto \text{ELG: } \ddot{\phi} = -\frac{g}{l} \sin\phi$$

## 6.4 Skizzen eines physikalischen Modells

-> Online im neuen Jahr

## 7.1 Transformationen von Bahnen und die Galileigruppe

Beobachtung: Physikalische Gesetze scheinen unabhängig von Ort, Zeit, Ausrichtung, ... zu sein.

Studium dieser *Symmetrien*:

- Vereinfacht Rechnungen (vergl. Keplerproblem)
- Liefert Erhaltungsgrößen (kommt bald)
- Zentrale Zutat bei der Konstruktion neuer Theorien (-> Relativität, Feldtheorien...)

Betrachte Funktionale

$$\Lambda: \vec{q}(\cdot) \mapsto \vec{q}'(\cdot)$$

die Bahnen auf Bahnen abbilden.

Bsp.: Galileo-Gruppe.

$N=3$ , Koordinaten  $\vec{r}$

- Ortsverschiebungen

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) + \vec{a} \quad \vec{a} \in \mathbb{R}^3$$

- Zeitverschiebungen

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t-s) \quad s \in \mathbb{R}$$

- Rotationen

$$\vec{r}'(t) = R \vec{r}(t)$$

$$R \in SO(3)$$

$$R^T R = \mathbb{1}, \quad \det R = 1.$$

- Galileo-Boost

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) + \vec{w} t \quad \vec{w} \in \mathbb{R}^3$$

- Raumspiegelung

$$\vec{r}'(t) = -\vec{r}(t)$$

- Zeitumkehr

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(-t)$$

Insgesamt:

$$\vec{r}'(t) = \varepsilon R \vec{r}(\lambda t - s) + \vec{w} t + \vec{a}$$

$$\vec{a} \in \mathbb{R}^3$$

3

$$\vec{w} \in \mathbb{R}^3$$

3

$$R \in SO(3)$$

3

$$s \in \mathbb{R}$$

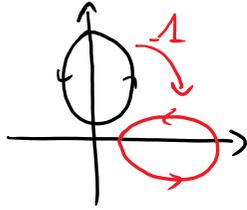
1

$$\varepsilon, \lambda \in \{1, -1\}$$

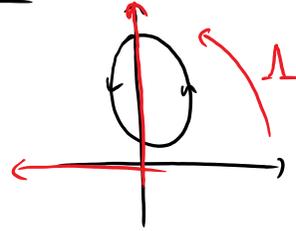
/ 10 kont. Parameter

# Interpretation

Aktiv



Passiv



## 7.2 Symmetrien

Wähle BWGL.

Ein Funktional  $\Lambda$  eine Symmetrie der BWGL, wenn

①  $\Lambda$  bildet Lsg. der BWGL auf Lsg. ab.

②  $\Lambda$  ist invertierbar.

Bsp.: m-Körper-Problem

•  $N = 3m$ , Koordinaten:  $\vec{r}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$ ,  $\vec{r} = \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vdots \\ \vec{r}_m \end{pmatrix}$ .

•  $L = T - V$        $T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \|\dot{\vec{r}}_i\|^2$

$V = \sum_{i < j} V_{ij}(\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|)$ ,  $V_{ij}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  beliebig.

Beh.: Galileo-Trans. sind Symmetrien des m-Körper-Problems.

Bew.:

Ortsverschiebung

$$\vec{r}_i'(t) = \vec{r}_i(t) + \vec{a}, \quad \dot{\vec{r}}_i'(t) = \dot{\vec{r}}_i(t)$$

$$\Rightarrow L(\vec{r}'(t), \dot{\vec{r}}'(t)) = L(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t))$$

$\Rightarrow$  Wirkung verändert sich nicht

$\Rightarrow$  Menge der stat. Bahnen verändert sich nicht.

$\leadsto$  Ebenso behandelt man: Rotationen, Raumspiegelung, Zeitumkehr.

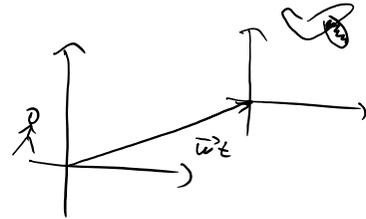
• Zeitverschiebung

$$\vec{r}''(t) = \vec{r}(t-s)$$

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} [\dot{\vec{r}}'(\cdot)] &= \int_{t_0}^{t_1} L(\vec{r}(t-s), \dot{\vec{r}}(t-s)) dt \\ &= \int_{t_0-s}^{t_1-s} L(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)) dt = \int_{t_0-s}^{t_1-s} [\dot{\vec{r}}(\cdot)] \end{aligned}$$

• Galileo-Boost

$$\boxed{\vec{r}'_i(t) = \vec{r}_i(t) + \vec{w}t} \Rightarrow \dot{\vec{r}}'_i(t) = \dot{\vec{r}}_i(t) + \vec{w}$$



$$\Rightarrow T(\dot{\vec{r}}'(t)) = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\dot{\vec{r}} + \vec{w}, \dot{\vec{r}} + \vec{w})$$

$$\begin{aligned} &= T(\dot{\vec{r}}(t)) + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_i m_i (2(\vec{w}, \dot{\vec{r}}) + \|\vec{w}\|^2)}_{\frac{d}{dt} \underbrace{\frac{1}{2} \sum_i m_i (2(\vec{w}, \vec{r}(t)) + \|\vec{w}\|^2 \cdot t)}_{B(\vec{r}(t), t)} \text{ "Randterm"} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t_1} [\dot{\vec{r}}'(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_1} [\dot{\vec{r}}(\cdot)] + B(\vec{r}(t), t) \Big|_{t_0}^{t_1}$$

Zu zeigen: für stationäre  $\vec{r}(\cdot)$ , und  $\vec{\delta}(\cdot)$  mit  $\vec{\delta}(t_0) = \vec{\delta}(t_1) = 0$  gilt

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{(\vec{r}(\cdot) + \vec{w}t) + \varepsilon \vec{\delta}(\cdot)}_{(\vec{r}(\cdot) + \varepsilon \vec{\delta}(\cdot)) + \vec{w}t}$$

$$\begin{aligned} &= \underbrace{\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \int_{t_0}^{t_1} [\vec{r}(\cdot) + \varepsilon \vec{\delta}]}_{=0 \text{ da } \vec{r}(\cdot) \text{ stationär}} + \underbrace{\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_0 \left( B(\vec{r}(t) + \varepsilon \vec{\delta}(t), t) \Big|_{t_0}^{t_1} \right)}_{=0 \text{ da } \vec{\delta} \text{ am Rand } = 0} \quad \checkmark \end{aligned}$$

$\delta F = 0$  da  $\vec{F}(\cdot)$  stationär

$\delta F = 0$  da  $\vec{\delta}$  am Rand  $= 0$ .  $\square$

### 7.3 Satz von Noether

"Kontinuierliche Symmetrie  $\Rightarrow$  EHG."

( $\Leftarrow$   $\rightarrow$  Umkehrung zeigen wir in Hamilton-Mechanik)

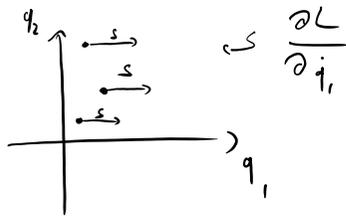
Motivation: Zyklische Koordinaten

Def.: Koordinate  $q_i$  zyklisch wenn  $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ .

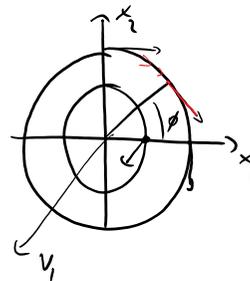
Sei nun  $q_i$  zyklisch  $\Rightarrow$  ELG  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \Rightarrow Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$  EHG!

Geometrisch: Bsp.:  $q_1$  zyklisch

$$L(q_1 + s, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2)$$



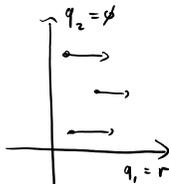
Betrachte  $L$  die unter Rotationen invariant ist.  $\rightarrow$  Wähle Polarkoordinaten



$\rightarrow \phi$  zyklisch

$\rightarrow$  EHG:  $\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}$

$$\vec{q}(t) \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}(q(t))$$



Die beiden Skizzen suggerieren, dass jede Invarianz der Lagrange-Funktion zu einer zyklischen Koordinate "geglättet" werden kann. Der damit assoziierte verallgemeinerte Impuls ist dann EHG.

Der Satz von Noether extrahiert die EHG direkt aus der Symmetrie, ohne dass man einen Koordinatenwechsel machen muss.

Das geht so:

Sei  $\vec{\Phi}^{(s)} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  invertierbar, mit

$$\textcircled{1} \quad \vec{\Phi}^{(0)}(\vec{x}) = \vec{x}$$

$$\textcircled{2} \quad \forall \vec{q}(\cdot), t : \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} L(\vec{\Phi}^{(s)}(\vec{q}(t)), \frac{d}{dt} \vec{\Phi}^{(s)}(\vec{q}(t)), t) = 0.$$

Bsp.: •  $\vec{\Phi}^{(s)}(\vec{x}) = \vec{x} + s\vec{a}$

•  $\vec{\Phi}^{(s)}(\vec{x}) = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos s & -\sin s & 0 \\ \sin s & \cos s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R_z^{(s)}} \vec{x}$

} und  $n$ -Körper-Lagrang.

Nicht-Bsp.:

- Zeitverschiebung (Die  $\Phi$ 's agieren nur auf dem Konfigurationsraum, nicht auf der Zeit)
- Galileo-Boosts (Der Randterm verdirbt es)

Satz Sei  $\vec{\Phi}^{(s)}$  wie oben. Setze

$$Q = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \vec{\Phi}_i^{(s)}(\vec{q}).$$

"verallg. Impuls in Richtung des V.F. der Symmetrie"

Dann: Für Lsg.  $\vec{q}(t)$  der B.W.G.E. gilt

$$Q(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t)) = \text{const.}$$

Bew.:

$$\frac{d}{dt} Q = \sum_i \underbrace{\left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)}_{\text{ELG} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_i}} \frac{d}{ds} \Big|_0 \vec{\Phi}_i^{(s)}(\vec{q}(t)) + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \frac{d}{ds} \Big|_0 \vec{\Phi}_i^{(s)}(\vec{q}(t))$$

$$= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} L(\vec{\Phi}^{(s)}(\vec{q}(t)), \frac{d}{dt} \vec{\Phi}^{(s)}(\vec{q}(t))) = 0. \quad \square$$

## 7.4 Homogenität und Isotropie des Raums

Noether EHG:

$$Q = \sum_{j=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \Phi_j^{(s)}(\vec{q})$$

Beispiele für das  $n$ -Körper-Problem  $L = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \|\dot{\vec{r}}_i\|^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} V_{ij}(\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|)$

- Ortsverschiebung entlang der  $x$ -Achse.

$$\vec{r}_i \mapsto \vec{r}_i + s \vec{e}_x$$

$$\vec{r} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + s \\ y_1 \\ z_1 \\ x_2 + s \\ y_2 \\ z_2 \\ x_3 + s \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} \vdots \\ = 1 \\ \vdots \\ = 2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} \begin{array}{l} i \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{array} \quad N=3m$$

$$Q = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \sum_i m_i \dot{x}_i = \left( \sum_i \vec{p}_i \right)_x$$

$\Rightarrow$  Homogenität des Raumes  $\Rightarrow$  Impulserhaltung

- Drehung um  $z$ -Achse.

$$\vec{r}_i \mapsto \begin{bmatrix} \cos s & -\sin s & 0 \\ \sin s & \cos s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{ds} \Big|_0 \quad \parallel \quad = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_i \\ x_i \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_z \times \vec{r}_i$$

$$Q = \sum_{i=1}^m \left( \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}}_{(\vec{p}_i)_x} (\vec{e}_z \times \vec{r}_i)_x + \dots \right)$$

$$= \sum_{i=1}^m \left( \vec{p}_i, \vec{e}_z \times \vec{r}_i \right)$$

$$= \left( e_z, \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{p}_i \right) = L_z \quad z\text{-Komp. des Gesamt Drehimpuls}$$

→ Isotropie des Raumes  $\Rightarrow$  Drehimpulserhaltung

## 7.5 Der verallgemeinerte Satz von Noether

Annahmen:

Betrachte Transformationen:  $\Lambda^{(s)}: \vec{q}(\cdot) \mapsto \vec{q}^{(s)}(\cdot)$  mit

$$(0) \quad \vec{q}^{(0)}(t) = \vec{q}(t).$$

$$(1) \quad \text{Es gibt Fkt. } \vec{\Delta}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \vec{q}^{(s)}(t) = \vec{\Delta}(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t)$$

$$\left( \text{Zuvor: } \vec{q}^{(s)}(t) = \vec{\Phi}^{(s)}(\vec{q}(t)) \Rightarrow \vec{\Delta} = \left. \frac{d}{ds} \right|_0 \vec{\Phi}^{(s)}(\vec{q}(t)) = \vec{\Delta}(\vec{q}(t)) \right)$$

$$(2) \quad \text{Es gibt Fkt. } f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_0 L(\vec{q}^{(s)}(t), \dot{\vec{q}}^{(s)}(t), t) = \frac{d}{dt} f(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t).$$

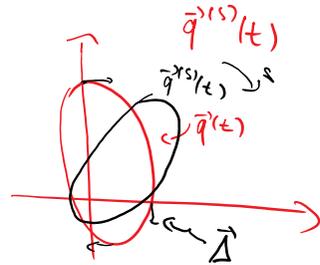
$$\left( \text{Zuvor: } f = 0 \right)$$

Dann:

$$Q = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Delta_i - f \quad \text{ist E.H.G.}$$

Bew.:

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d}{dt} Q(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t) \right. \\ &= \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \Delta_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \Delta_i \right) - \frac{d}{dt} f \end{aligned}$$



$$= \frac{d}{ds} \Big|_0 L(\bar{q}^{(s)}(t), \dot{\bar{q}}^{(s)}(t), t) - \frac{d}{dt} f$$

$$= \frac{d}{dt} f$$

$$- \frac{d}{dt} f = 0$$

□

## 7.6 Homogenität der Zeit, Galileo-Booster

Noether EHG:

$$Q = \sum_{j=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \Delta_j - f$$

Beispiele für das  $m$ -Körper-Problem  $L = \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} m_i \|\dot{\vec{r}}_i\|^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq m} V_{ij}(\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|)$

- Zeitverschiebungen

$$\vec{r}^{(s)}(t) = \vec{r}(t-s)$$

$$\textcircled{1} \quad \vec{r}^{(0)}(t) = \vec{r}(t) \quad \checkmark$$

$$\textcircled{2} \quad \left. \frac{d}{ds} \right|_0 \vec{r}(t-s) = -\dot{\vec{r}}(t) = \vec{\Delta}$$

$$\textcircled{3} \quad \left. \frac{d}{ds} \right|_0 L(\vec{r}^{(s)}(t), \dot{\vec{r}}^{(s)}(t))$$

$$= - \sum_{j=1}^N \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_j} \dot{\vec{r}}_j(t) - \sum_{j=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_j} \ddot{\vec{r}}_j(t)$$

$$= - \frac{d}{dt} L(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)) \quad \Rightarrow \quad f = -L.$$

$$\Rightarrow \quad Q = - \sum_{j=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_j} \dot{\vec{r}}_j + L = -H$$

Für  $m$ -Körper:

$$\sum_{i=1}^m \left( \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}}_{m_i \dot{x}_i} \dot{x}_i + \dots \right) = 2T(\dot{\vec{r}})$$

$$\Rightarrow H = -Q = 2T - L = 2T - (T - V)$$

$$= T + V = \text{Energie.}$$

Homogenität der Zeit  $\Rightarrow$  Energieerhaltung

- Galileo Boost (entlang x-Achse)

$$\vec{r}_i^{(s)} = \vec{r}_i + s \vec{e}_x \cdot t$$

$$\textcircled{2} \quad Q = \sum_{i=1}^m \frac{\partial L}{\partial \dot{k}_i} t - f$$

$(\vec{p}_i)_x$

$$\textcircled{3} \quad f = \left. \frac{d}{ds} \right|_0 \frac{1}{2} \sum_i m_i (2s x_i(t) + s^2 \cdot t)$$

$$= \left( \sum_i m_i \vec{r}_i \right)_x$$

$$M = \sum_i m_i \quad \text{Gesamtmasse}$$

$$-\frac{1}{M} Q = \underbrace{\left( \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i \right)}_{\text{Schwerpunkt}}_x - t \underbrace{\frac{1}{M} \left( \sum_i \vec{p}_i \right)}_{\text{Gesamtimpuls}}_x$$

Boost-Invarianz  $\Rightarrow$  Schwerpunktsatz

## 8.1 Hamilton-Mechanik

	$N$ Variablen 2. Ordnung in $t$	$2N$ Variablen 1. Ordnung in $t$
Elementare Mechanik	Newton $\frac{d^2}{(dt)^2} r_i = -\frac{1}{m_i} \frac{\partial V}{\partial r_i}$	$\frac{d}{dt} r_i = v_i$ $\frac{d}{dt} v_i = -\frac{1}{m_i} \frac{\partial V}{\partial r_i}$
Analytische Mechanik	Lagrange $\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$	Hamilton  ... kommt jetzt ...

### Hamiltonsche BWG.

Zutaten: •  $\mathbb{R}^{2N}$  Phasenraum mit Koordinaten  $\vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{q} \\ \vec{p} \end{pmatrix}$ .

• Hamilton-Fkt.  $H(\vec{q}, \vec{p}, t) : \mathbb{R}^{2N+1} \rightarrow \mathbb{R}$ .

• Eine Bahn  $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \vec{q}(t) \\ \vec{p}(t) \end{pmatrix}$  erfüllt Hamiltonsche BWG

wenn gilt

$$\begin{aligned} \dot{q}_i(t) &= \frac{\partial H}{\partial p_i}(\vec{q}(t), \vec{p}(t), t) \\ \dot{p}_i(t) &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}(\vec{q}(t), \vec{p}(t), t) \end{aligned} \quad (H)$$

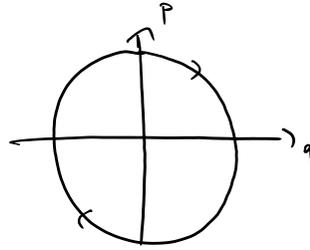
Bsp.:  $N=1$ ,  $H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$

$$\leadsto \dot{q}(t) = \frac{\partial H}{\partial p} = p(t), \quad \dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial q} = -q(t)$$

Gelöst durch

$$q(t) = A \sin(t + \phi)$$

$$p(t) = A \cos(t + \phi)$$



## 8.2 Von Lagrange zu Hamilton

$$(ELG) \quad \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Frage: wie hängen die  
zusammen?

$$(H) \quad \begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned}$$

Gegeben:  $L(\vec{q}, \vec{v}, t)$ .

① Setze

$$(*) \quad p_i(\vec{q}, \vec{v}, t) = \frac{\partial L}{\partial v_i}(\vec{q}, \vec{v}, t) \quad i=1 \dots N$$

$i$ -te kanonisch konjugierte Impuls

② Löse (\*) nach  $\vec{v}$  auf:

$$\leadsto v_i(\vec{q}, \vec{p}, t) \quad i=1, \dots, N$$

Wenn Auflösen nicht möglich: Umschreiben  
von Lagrange auf Hamilton schrittweise. ;)

③ Setze

$$H(\vec{q}, \vec{p}, t) = \sum_i p_i v_i(\vec{q}, \vec{p}, t) - L(\vec{q}, \vec{v}(\vec{q}, \vec{p}, t), t)$$

Legendre-  
Transformation

Bemerkung: Interessieren uns für  $L/H$  i.d.R. im  
Zusammenhang mit Bahnen  $\vec{q}(t)$ . Setze denn  $\vec{v} = \dot{\vec{q}}$ .

$$\leadsto p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L.$$

Bsp.:  $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = T(\dot{\vec{q}}) - V(\vec{q})$ ,  $T(\dot{\vec{q}}) = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{q}_i^2$ .

$\Rightarrow p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m_i \dot{q}_i \Rightarrow \dot{q}_i(\vec{q}, \vec{p}, t) = \frac{1}{m_i} p_i$ .

$\Rightarrow \sum_i p_i \dot{q}_i = \sum_i \frac{p_i^2}{m_i} = 2T$

$\Rightarrow H = 2T - T + V = T + V$  Gesamtenergie.

Beh.:  $\vec{q}(t)$  erfüllt (ELG) bzgl.  $L$

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \vec{q}(t) \\ \vec{p}(t) \end{pmatrix} \text{ erfüllt (H) mit} \\ \cdot p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad \cdot H = \sum_i p_i \dot{q}_i(\vec{q}, \vec{p}, t) - L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}(\vec{q}, \vec{p}, t), t) \end{array} \right.$

Bew.: " $\Rightarrow$ " Nehme an, dass  $\vec{q}(t)$  die (ELG) erfüllt. Dann:

$\frac{\partial H}{\partial q_j} = \sum_i p_i \cancel{\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j}} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_i \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}_{p_i} \cancel{\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j}} \stackrel{(ELG)}{=} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = - \dot{p}_j$  ✓

$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j + \sum_i p_i \cancel{\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_j}} - \sum_i \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}_{p_i} \cancel{\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_j}} = \dot{q}_j$  ✓

" $\Leftarrow$ " Nehme an, dass  $\vec{x}(t)$  (H) erfüllt. Dann:

$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \dot{p}_j = - \frac{\partial H}{\partial q_j} = \sum_i p_i \cancel{\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j}} + \frac{\partial L}{\partial q_j} + \sum_i \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j}$  ✓

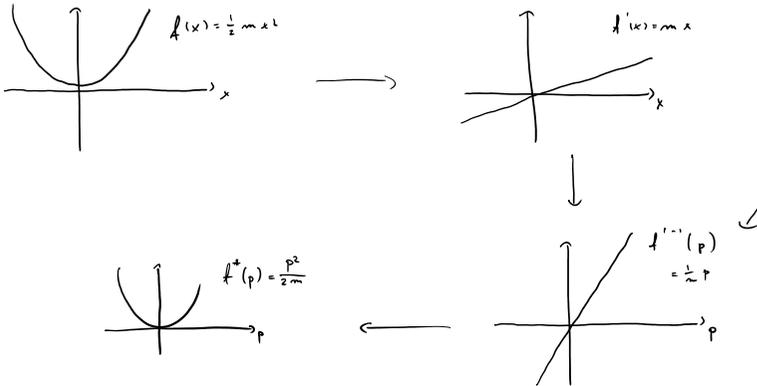
Zusammenfassung

Rahmen	System spezifiziert durch		
Newton	$\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$	Kraftgesetz	Integration $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$ $\leadsto L = T - V$
Lagrange	$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$	Lagrange-Fkt.	
Hamilton	$H(\vec{q}, \vec{p}, t)$	Hamilton-Fkt.	Legendre-Transf. $H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$

Betrachte Fkt.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Setze  $p(x) := f'(x)$ .

Manchmal ist  $p$  umkehrbar:



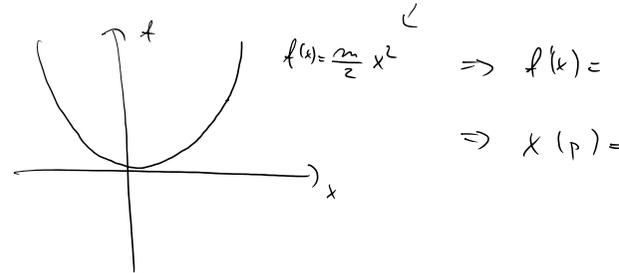
Setze dann:  $f^*: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$p \mapsto p f'^{-1}(p) - f(f'^{-1}(p)). \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Legendre-} \\ \text{Transform.} \end{array} \right.$$

Physik-Konvention:  $p(x) := f'(x)$   
 $x(p) := f'^{-1}(p)$  }  $\Rightarrow f^*(p) = p x(p) - f(x(p))$   
 $= p x - f$

$f(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$p(x) := f'(x) \Rightarrow x(p)$



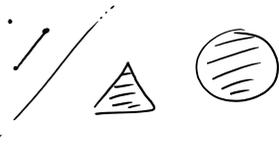
$\Rightarrow$  Def.:  $f^*: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Leg.-Trans.

WTF?  
 $f^*(p) := p x(p) - f(x(p))$   
 $= \frac{p^2}{m} - \frac{m}{2} \left(\frac{1}{m} p\right)^2$

Einschub: Geometrie der Legendre-Trans.

Eine Menge  $M \subset \mathbb{R}^M$  ist konvex wenn die Verbindungsline zwischen je zwei Punkten aus  $M$  in  $M$  liegt.

Konvex



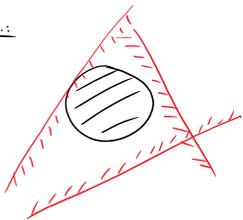
Nicht konvex



Dualität: Konvexe Menge  $M$  ist

- Vereinigung aller Punkte in  $M$
- oder
- Schnitt aller Halbräume, die  $M$  enthalten

Bsp:

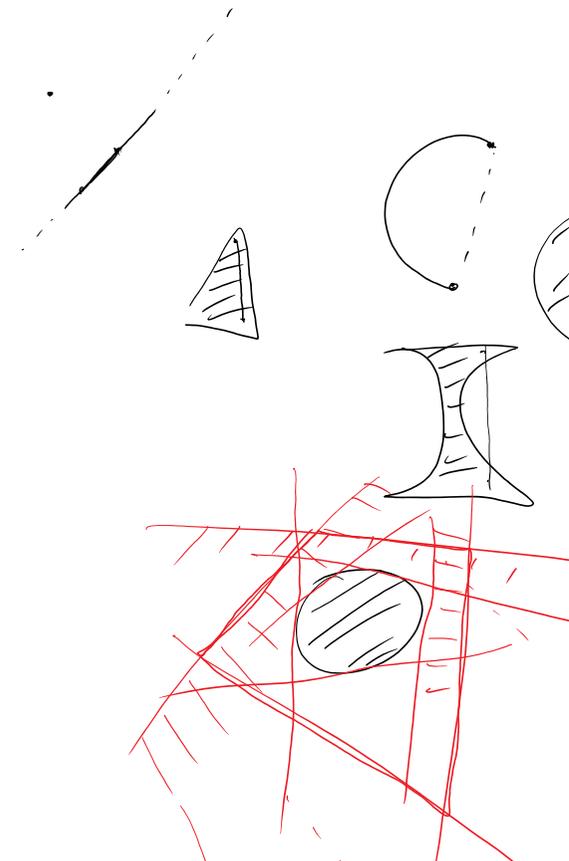


Für nicht-konvexe Mengen gilt das nicht:



Dieses Konzept der konvexen Dualität nimmt viele Formen an und kommt in viele Bereichen der Mathematik und Physik vor. Z.B.:

- In der Theorie von Polyhedren - insbesondere der Platonischen Körper
- In der Theorie normierter Räume
- Bei der Beschreibung allgemeiner Messungen auf quantenmechanischen Systemen
- In der Studie hypothetischer probabilistischer Theorien, die noch allgemeiner sind als QM
- In der Optimierungstheorie, wo Dualität benutzt wird um Optimalität einer Lösung zu zeigen, oder, allgemeiner, obere- und untere Schranken an eine zu optimierende Funktion zu finden
- ...und eben in der Zuordnung einer dualen Funktion - der Legendre-Transformierten.



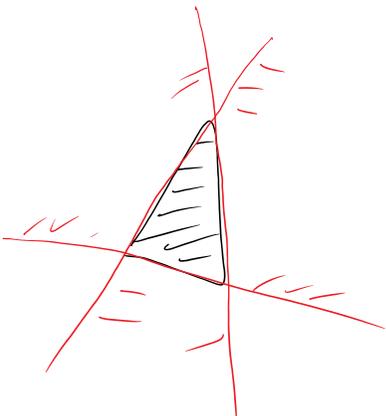
$$m \cdot x =: p(x)$$

$$\frac{1}{2} p \cdot$$

? ?

st.

$$z = \frac{p^2}{2m}$$



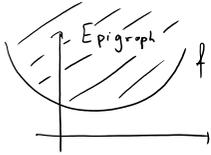
- In der Studie hypothetischer probabilistischer Theorien, die noch allgemeiner sind als QM
- In der Optimierungstheorie, wo Dualität benutzt wird um Optimalität einer Lösung zu zeigen, oder, allgemeiner, obere- und untere Schranken an eine zu optimierende Funktion zu finden
- ...und eben in der Zuordnung einer dualen Funktion - der Legendre-Transformierten.



Primal and dual polyhedra.  
From: [https://en.wikipedia.org/wiki/Primal\\_dual](https://en.wikipedia.org/wiki/Primal_dual)

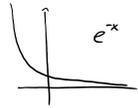
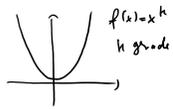
Zu Dualität bei Funktionen:

Der Epigraph einer Fkt.  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ist Menge der Punkte "über dem Graph" von  $f$ :

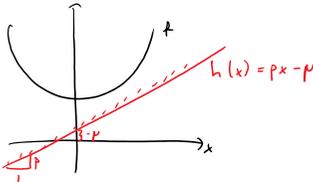


$f$  ist konvex  $\Leftrightarrow$  Epigraph ist konvex.

Bsp:



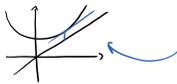
Sei  $f$  konvex. Halbgeraden, die den Epigraph von  $f$  enthalten, werden durch affine untere Schranken an  $f$  beschrieben:



$$h(\vec{x}) = (\vec{p}, \vec{x}) - p \quad \text{affin}$$

$$\text{mit } h(\vec{x}) \leq f(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

$$\Leftrightarrow p \geq \sup_{\vec{x}} [(\vec{p}, \vec{x}) - f(\vec{x})] =: f^*(\vec{p}).$$



Beh.: Sup. wird bei  $\vec{x}$  angenommen, wo  $\vec{\nabla} f(\vec{x}) = \vec{p}$  ist.

Bew.:  $0 \stackrel{!}{=} \vec{\nabla}((\vec{p}, \vec{x}) - f(\vec{x}))$   
 $= \vec{p} - \vec{\nabla} f(\vec{x}) \quad \square$

$$\Rightarrow f^*(\vec{p}) = (\vec{p}, (\vec{\nabla} f)^{-1}(\vec{p})) - f((\vec{\nabla} f)^{-1}(\vec{p}))$$

$$=: \sum_j p_j x_j(\vec{p}) - f(\vec{x}(\vec{p})).$$

Eigenschaften:

- $f^*$  ist konvex
- $f^{**} = f$

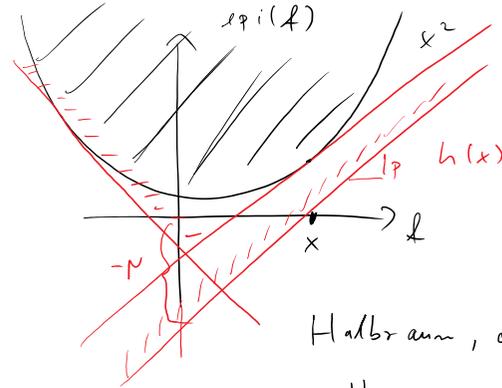
Bew. (1) Epigraph von  $f^* \hat{=} \underbrace{\text{Menge aller affinen unteren Schranken an } f}_{\text{konvex.}}$

(2) Konvexe Funktionen sind punktweises Max. aller affinen unteren Schranken.

Daher:  $f(\vec{x}) = \sup_{\vec{p}} [(\vec{x}, \vec{p}) - f^*(\vec{p})] = (f^*)^*(\vec{x}). \quad \square$



Fkt.



Halbraum, der den epig. enth.

$\hat{=}$  affine unt. Schranke

Gegen  $p$  an  $f$ .

$$h(x) = px - p \leq f(x)$$

$$\Leftrightarrow p \geq \sup_x (px - f(x)) =: f^*(p)$$

Beh.: sup wird angenommen

$$x \quad \text{wo} \quad f'(x) = p.$$

Bew.:  $0 \stackrel{!}{=} \frac{d}{dx} (px - f(x))$

$$= p - f'(x) \quad \square$$

$$\Rightarrow f^*(p) = p(f')^{-1}(p) - f((f')^{-1}(p))$$

/ - 7 -

N

h

unter h

$\forall x$

$\rightarrow (p)$

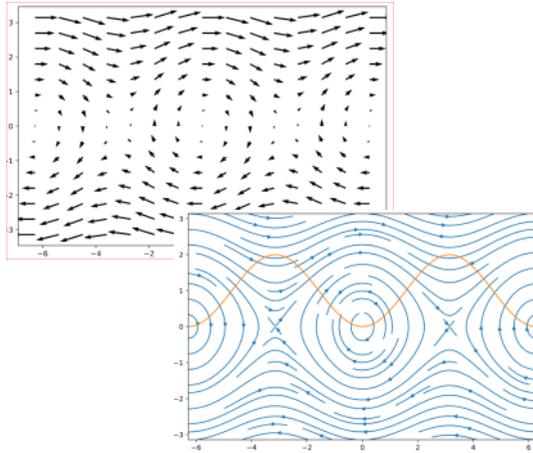
---

bei

$(x)$ .

### 8.3 Hamiltonsche Vektorfelder

Erinnerung



$$\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \vec{f}(\vec{x}(t))$$

Differentialgleichungen erster Ordnung beschreiben Fluß durch Vektorfelder im Phasenraum.

Hamilton:  $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$

$$\vec{\nabla} H = \begin{pmatrix} \vec{\nabla}_q H \\ \vec{\nabla}_p H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial q_N} \\ \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1}_N \\ -\mathbb{1}_N & 0 \end{bmatrix}}_J \begin{pmatrix} \vec{\nabla}_q H \\ \vec{\nabla}_p H \end{pmatrix}$$

mit  $\mathbb{1}_N = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}_N$

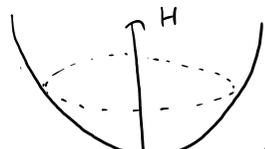
J "symplektische Matrix".

$$\Rightarrow \dot{\vec{x}} = J \vec{\nabla} H$$

Hamiltonsche Vektorfeld.

Bsp.: Harmonischer Osz.

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2$$

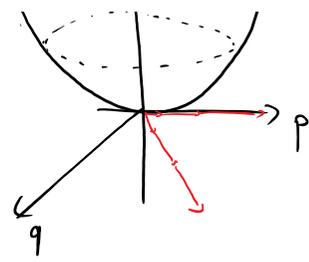


= r =

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2$$

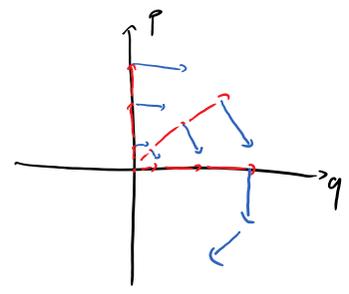
$$= \frac{1}{2} (p^2 + q^2)$$

$m = \omega = 1$



as  $\vec{\nabla} H(\vec{x}) = \vec{x}$

$\leadsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ -q \end{pmatrix}$



Erinnerung: [Picard-Lindelöf] Zu jedem Pkt  $\vec{y} \in \mathbb{R}^{2N}$  gibt es  
 eindeutige Integralkurve  $\vec{x}(t)$  durch  $\vec{y}$ :

- $\vec{x}(0) = \vec{y}$
  - $\dot{\vec{x}}(t) = \int \vec{\nabla} H(\vec{x}(t))$
- (\*)

$\leadsto$  Def. Hamiltonscher Fluß (Propagator)  $\Phi_H^{(s)} : \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}^{2N}$

$\Phi_H^{(s)}(\vec{y}) =$  Pkt, an dem  $\vec{y}$   $s$  Zeiteinheiten später sein wird  
 $= \vec{x}(s)$  mit  $\vec{x}$  wie in (\*).

Bsp.: Harmonische Osz.  $\Phi_H^{(s)}(\vec{y}) = \begin{bmatrix} \cos s & \sin s \\ -\sin s & \cos s \end{bmatrix} \vec{y}$ .

Zusammenfassung: Dinge, die nach Hamilton benannt sind.	
$\mathbb{R}^{2N}$	Phasenraum
$H(\vec{x})$	Hamilton-Fkt.
$\int \vec{\nabla} H$	Hamiltonsche V.F.
.	..

$\vec{\nabla} H$       Hamiltonsche V.F.

$\dot{\vec{x}} = \vec{\nabla} H$       Hamiltonsche Gl. ( $\hat{=}$   $\vec{x}(t)$  Integralkurve  
des Hamilt. V.F.)

$\Phi_H^{(s)} : \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}^{2N}$       Hamiltonscher Fluß

## 8.4 Poissonklammern

Betrachte reelle Fkt.  $f: \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Bsp.: •  $H(\vec{q}, \vec{p})$  zeitunabh. Hamilton-Fkt.

•  $L_z = q_x p_y - q_y p_x$  z-Komp. des Drehimpuls

Sei  $\vec{x}(t)$  Lsg. der BWG'm.

→ Def.:  $f(t) = f(\vec{x}(t))$ .

Rechner: 
$$\frac{d}{dt} f(t) = \sum_{i=1}^{2N} \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i$$

$$= \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} - \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i}$$

$$=: \{H, f\}$$

Poisson-Klammer = Änderung von  $f$   
entlang des Fluss von  $H$ .

Insbesondere

•  $f$  EHG  $\Leftrightarrow \{H, f\} = 0$ .

• Hamiltongl.:  $\dot{q}_i = \{H, q_i\}$

$\dot{p}_i = \{H, p_i\}$

Eigenschaften

① Anti-Symmetrie:  $\{f, g\} = -\{g, f\}$ .

② Bilinear:  $\{f, g + \lambda h\}$   
 $= \{f, g\} + \lambda \{f, h\}$

Bsp.-Anwendung. Sei  $H = H(\vec{q}, \vec{p})$ .

$$\begin{aligned} \text{Dann: } \frac{d}{dt} H(\vec{x}(t)) &= \{H, H\} \\ &= -\{H, H\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

③ Produktregel:  $\{f, gh\} = g\{f, h\} + \{f, g\}h$

④ Jacobi-Identität

Erinnerung aus der Algebra

Ein Produkt ist assoziativ wenn

$$A(B \cdot C) = (A \cdot B)C$$

$$\{f, \{g, h\}\} \neq \{\{f, g\}, h\}$$

i. Alg.

Die Poissonklammer ist nicht assoziativ. Die verschiedenen Reihenfolgen in der man eine verschachtelte Anwendung von drei Poissonklammer gruppieren kann sind aber nicht unabhängig:

$$\underbrace{\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\}}_{\text{zyklische Permutationen}} = 0$$

Aber was soll das bedeuten? Einige Hinweise dazu gibt es [bald](#).

⑤ Koordinaten-Fkt.:

$$\{x_i, x_j\} = \delta_{ij}$$

$$i, j = 1, \dots, 2N$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} q_1 & \dots & q_N & p_1 & \dots & p_N \\ \vdots & & & & & \vdots \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \{q_i, q_j\} = 0 \\ \{p_i, p_j\} = 0 \\ \{p_i, q_j\} = \delta_{ij} \\ \{q_i, p_j\} = -\delta_{ij} \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, N$$

### 8.4.1 Noether, aber besser

$$f: \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{ist EHG}$$

$$\Leftrightarrow f(\vec{y}) = f(\Phi_H^{(s)}(\vec{y})) \quad \forall \vec{y} \in \mathbb{R}^{2N}, s \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \{H, f\} = 0$$

$$\Leftrightarrow \{f, H\} = 0 \quad (!!!)$$

$$\Leftrightarrow H(\vec{y}) = H(\Phi_f^{(1)}(\vec{y}))$$

$$\Leftrightarrow \text{Hamilton-Fkt. ist invariant unter Fluß von } f.$$

Wie cool ist das denn? Man kann die EHG selbst als eine Art Hamiltonfunktion auffassen. Die erzeugt dann einen Fluss im Phasenraum und der ist eine Symmetrie der eigentlichen Hamiltonfunktion.

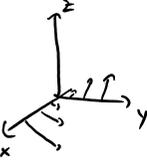
Das freut mich mehr als es vielleicht sollte. In jedem Fall zeigt sich hier so deutlich wie sonst selten, dass die vielen Abstrahierungen die uns von "Kraft ist Masse mal Beschleunigung" zur Poissonstruktur des Phasenraums geführt haben, manchmal tiefe Zusammenhänge klar ans Licht bringen.

Es stellt sich nun eine Kompatibilitätsfrage. Fangen wir an mit einer Symmetrie  $\Phi$  wie wir sie in der Lagrange-Formulierung von Noethers Satz behandelt haben. Der gab uns damals eine EHG  $Q(r, \dot{r})$ . Wenn wir die Geschwindigkeiten auf Impulse umrechnen, ergibt sich eine erhaltene Phasenraumfunktion  $Q(r, p)$ . Ist deren Fluss jetzt gleich die ursprüngliche Symmetrie? Die Antwort ist: Im Wesentlichen ja. Anstatt die Details im allgemeinen Fall zu beschreiben, rechnen wir hier ein Beispiel.

$$\underline{\text{Bsp.}}: f = L_z = q_x p_y - q_y p_x.$$

Fasse  $L_z$  als Hamilton-Fkt. auf. Löse Bwgl.:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial L_z}{\partial p_i} = \begin{cases} -q_y & i=x \\ q_x & i=y \\ 0 & i=z \end{cases} = (\vec{e}_z \times \vec{q})_i$$



$$\dot{p}_i = -\frac{\partial L_z}{\partial q_i} = \dots = (\vec{e}_z \times \vec{p})_i$$

$$\Rightarrow \mathbb{I}_{L_z}^{(s)} \begin{pmatrix} \vec{q} \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} R_z^{(s)} & 0 \\ 0 & R_z^{(s)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{q} \\ \vec{p} \end{pmatrix} \quad \downarrow$$

8.4.2 EHG sind unter Poisson-Klammern abgeschlossen

Wenn  $f, g$  EHG  $\Rightarrow \{f, g\}$  ist EHG.

Bew.: Seien  $f, g$  EHG.

$$\{H, \{f, g\}\} = - \underbrace{\{g, \{H, f\}\}}_{=0} - \underbrace{\{f, \{g, H\}\}}_{=0} = 0. \quad \square$$

Bsp.:  $f = L_x, g = L_y$

$$\begin{aligned} \boxed{\{L_x, L_y\}} &= \{q_y p_z - q_z p_y, q_z p_x - q_x p_z\} \\ &= \underbrace{\{q_y p_z, q_z p_x\}}_{=0} - \underbrace{\{q_y p_z, q_x p_z\}}_{=0} - \dots + \underbrace{\{q_z p_y, q_x p_z\}}_{-p_y q_x} \\ &= q_z \underbrace{\{q_y p_z, p_x\}}_{=0} + \{q_y p_z, q_z\} p_x = q_y \underbrace{\{p_z, q_z\}}_{=1} p_x = q_y p_x \\ &= q_y p_x - q_x p_y \\ &= \boxed{-L_z}. \end{aligned}$$

Also: Wenn zwei Komponenten des Drehimpuls erhalten sind, dann auch die Dritte.

Jetzt können wir eine Ahnung davon bekommen, was die Jacobi-Identität bedeutet. Die Geschichte geht so: gegeben zwei EHG, kann man zwei Symmetrien finden. Symmetrien bilden aber eine Gruppe: Wenn je zwei Abbildungen die Hamiltonfunktion invariant lassen, dann auch ihre Verknüpfung. Nach Noether gibt es zur verknüpften Symmetrie wieder eine EHG. Die gewinnt man (nach einigen Details, die wir ignorieren) durch die Poissonklammer.

Die Jacobi-Identität spiegelt also auf der Ebene der EHG wieder, dass Symmetrien eine Gruppe bilden.

Man kann das in der Theorie der Lie-Gruppen präzise verstehen.

Allgemein:

$f, g$

E H G

$\Downarrow$

$\bar{\Phi}_f^{(s)}, \bar{\Phi}_g^{(s)}$

Symmetrien

$\Downarrow$

$\vec{y} \mapsto \bar{\Phi}_f^{(s)}(\bar{\Phi}_g^{(s)}(\vec{y}))$

Symmetrie

$\Downarrow (s \rightarrow 0)$

Weitere E H G  $\approx \{f, g\}$ .

### Thema für die Online-Sitzung

In der QM werden Orte und Impulse durch  
Multiplikations- bzw. Differentialoperatoren beschrieben,  
die auf "Wellenfunktionen"  $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  agieren:

$$\hat{Q}_j : \psi(\vec{q}) \mapsto q_j \psi(\vec{q})$$

$$\hat{P}_j : \psi(\vec{q}) \mapsto i\hbar \frac{\partial}{\partial q_j} \psi(\vec{q})$$

Man rechnet leicht die folgenden Kommutator-Relationen  
nach:

$$\frac{i}{\hbar} [\hat{Q}_i, \hat{Q}_j] = 0$$

$$\frac{i}{\hbar} [\hat{P}_i, \hat{P}_j] = 0$$

$$\frac{i}{\hbar} [\hat{P}_i, \hat{Q}_j] = \delta_{ij}$$

Die Orts- und Impulsoperatoren erfüllen unter dem Kommutator also die gleichen Relation wie die Orts- und Impulsfunktionen unter der Poisson-Klammer.

Man kann dieses Resultat benutzen, um das Verhalten von quantenmechanischen und klassischen Systeme miteinander in Verbindung zu setzen. Das funktioniert für Hamiltonfunktionen, die Polynome bis zur zweiten Ordnung in Orts- und Impulsoperatoren sind.

Neben dieser "kanonischen Quantisierung", die die Orts- und Impulsoperatoren in den Vordergrund stellt, gibt es z.B. auch noch die "Pfandintegralquantisierung", die direkt auf dem Wirkungsintegral aufbaut.

Aber das ist ein Thema für das nächste Semester...

## 8.5 Koordinaten im Phasenraum

**Erinnerung:** Die Euler-Lagrange Gleichungen zeichnen physikalische Bahnen in beliebigen Koordinaten für den Konfigurationsraum  $\mathbb{R}^N$  aus.

Frage: In welchen Koordinaten für den Phasenraum  $\mathbb{R}^{2N}$  haben die Bewegungsgleichungen die Hamiltonsche Form

$$(H) \quad \dot{\vec{x}}(t) = \int \vec{\nabla}_{\vec{x}} H$$

Zwei Motivationen

① Wähle an das Problem angep. Koordinaten, insb. "Alt" im Hinblick auf Zwangsbedingungen.

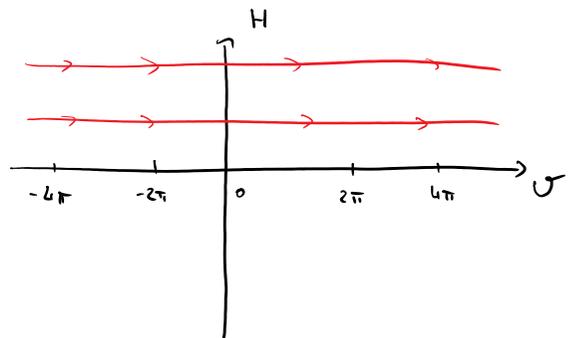
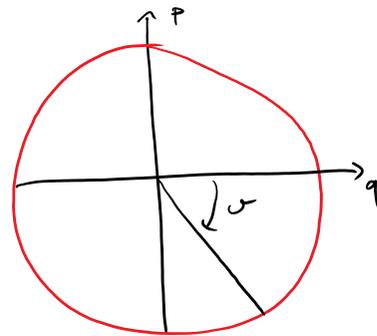
② Idee: Vereinfache BWG, in dem EHG selbst als Koordinaten gewählt werden. "Neu"

Bsp.: Harmonische Osz.

$$H = \frac{1}{2} (q^2 + p^2)$$

→ Wähle "Polarkoordinaten"  
( $\varphi, H$ )

$$\leadsto \text{BWG.} = \begin{cases} \dot{H} = 0 \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases}$$



Systeme, deren Fluss in diesem Sinne linearisierbar ist, heißen **integrabel**. Wir werden das später genauer formulieren.

Die Transformation wäre im Lagrange-Formalismus nicht möglich gewesen, da die neuen Koordinaten (wie bei EHG üblich) von Ort **und** Impuls abhängen.

## 8.5.1 Kanonische Transformationen

$$(H) \quad \frac{d}{dt} \vec{X}(t) = \vec{J} \vec{\nabla}_{\vec{x}} H$$

Wähle beliebige Koordinaten

$$\vec{X}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \vec{Q}(\vec{q}, \vec{p}, t) \\ \vec{P}(\vec{q}, \vec{p}, t) \end{pmatrix}.$$

Um die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen auf neue Koordinaten umzuschreiben, gehe vor wie zuvor für die Newtongleichung.

• Benötigen die Jacobi-Matrizen

$$A_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}, \quad B_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}.$$

• Diese sind die Inversen voneinander:

$$\delta_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial X_j} = \sum_k A_{ik} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} = \sum_k A_{ik} B_{kj} = (A B)_{ij}.$$

• Linke Seite:

$$\frac{d}{dt} x_i(t) = \frac{d}{dt} x_i(\vec{X}(t)) = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \dot{X}_j(t)$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{x}}(t) = A^{-1} \dot{\vec{X}}(t)$$

• Rechte Seite:

$$\left( \vec{\nabla}_{\vec{x}} H \right)_i = \frac{\partial H}{\partial x_i} = \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial X_i} \frac{\partial H}{\partial X_j}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}_{\vec{x}} H = A^T \vec{\nabla}_{\vec{X}} H.$$

Kombiniert:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \mathcal{J} \vec{\nabla}_{\vec{z}} H$$

$$\Leftrightarrow A^{-1} \dot{\vec{X}}(t) = \mathcal{J} A^T \vec{\nabla}_{\vec{x}} H$$

$$\Leftrightarrow \dot{\vec{X}}(t) = (A \mathcal{J} A^T) \vec{\nabla}_{\vec{x}} H$$

$\leadsto$  Form der Hamiltongl. erhalten wenn

$$A \mathcal{J} A^T = \mathcal{J}.$$

Solche Koordinatenwechsel heißen Kanonische Transformationen.

Koordinatenwechsel  $\vec{X}(\vec{x})$  kanonisch

$\Leftrightarrow$  Jacobi-Matrix  $A_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}$  erfüllt  $A \mathcal{J} A^T = \mathcal{J}$

Erinnerung: Der  $\mathbb{R}^N$  mit Skalarprodukt

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_i x_i y_i$$

ist der  $N$ -dim. euklidische Raum. Seine Symmetriegruppe sind  $N \times N$  Matrizen  $A$  mit

$$(\vec{x}, \vec{y}) = (A\vec{x}, A\vec{y}) \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^N$$

Äquivalent:

$$(A\vec{x}, A\vec{y}) = (A^T A \vec{x}, \vec{y}) \stackrel{!}{=} (\vec{x}, \vec{y}) \quad \Leftrightarrow \quad A^T A = \mathbb{1}$$

$$\Rightarrow A^T \mathbb{1} A = \mathbb{1}$$

Def.:  $\{ A \mid A^T A = \mathbb{1} \} = O(N)$ , die orthogonale Gruppe.

Der  $\mathbb{R}^{2N}$  mit innerem Produkt

$$(S) \quad [\vec{x}, \vec{y}] = (\vec{x}, \mathcal{J} \vec{y})$$

ist  $2N$ -dim. symplektischer Raum. Das innere Produkt  $[\cdot, \cdot]$  heißt

symplektische Form. Sie ist anti-symmetrisch:

$$[\vec{x}, \vec{y}] = (\vec{x}, \mathcal{J} \vec{y}) = (\mathcal{J} \vec{y}, \vec{x}) = (\vec{y}, \mathcal{J}^T \vec{x}) = -(\vec{y}, \mathcal{J} \vec{x}) = -[\vec{y}, \vec{x}]$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [\vec{x}, \vec{x}] = -[\vec{x}, \vec{x}] \Rightarrow [\vec{x}, \vec{x}] = 0$$

$\leadsto$  Jeder Vektor ist selbst-orthogonal!

Def.: Die symplektische Gruppe  $Sp(2N)$  ist Menge der  $2N \times 2N$ -Matrizen  $A$  mit

$$(*) \quad [\vec{x}, \vec{y}] = [A\vec{x}, A\vec{y}] \quad \forall \vec{x}, \vec{y}.$$

Äquivalent:

$$[A\vec{x}, A\vec{y}] = (A\vec{x}, \mathcal{J}A\vec{y}) = (\vec{x}, A^T \mathcal{J}A\vec{y}) \stackrel{!}{=} (\vec{x}, \mathcal{J}\vec{y})$$

$$\Leftrightarrow A^T \mathcal{J}A = \mathcal{J}.$$

Eigenschaften:

$$\bullet A \in Sp \Leftrightarrow A^T \in Sp$$

$$\leadsto \vec{X}(\vec{x}) \text{ kanonisch} \Leftrightarrow \text{Jacobi-Matrix} \in Sp.$$

$$\bullet A \in Sp \Rightarrow \det A = 1.$$

$$\bullet \text{Poisson-Klammer: } \{f, g\} = [\vec{\nabla}_g, \vec{\nabla}_f].$$

$\Delta VZ!$

Weitere Eigenschaften und Beweisskizzen:



8.5.3 Poissonklammer-Kriterium für kanonische Transformationen

Beh.:  $\vec{X}(\vec{x})$  kanonisch  $\Leftrightarrow \{X_i, X_j\} = \{x_i, x_j\}$ .

Bew.:  $\{X_i, X_j\} = [\vec{\nabla}_{\vec{x}} X_j, \vec{\nabla}_{\vec{x}} X_i]$

$$= [A^T \underbrace{\vec{\nabla}_X X_j}_{e_j}, A^T \underbrace{\vec{\nabla}_X X_i}_{e_i}]$$

$$= [e_j, e_i] \quad \Leftrightarrow A \in Sp(2N)$$

$$= [\vec{\nabla}_x x_j, \vec{\nabla}_x x_i]$$

$$= \{x_i, x_j\}$$

□

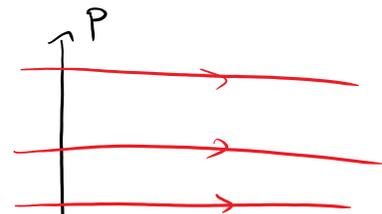
Bsp.: Harmonische Osz.

$$H(q, p) = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2$$

Beh.:  $P(q, p) = \frac{1}{\omega} H(q, p)$  } ist kanonisch.  
 $Q(q, p) = \alpha \tan(m \omega \frac{q}{p})$

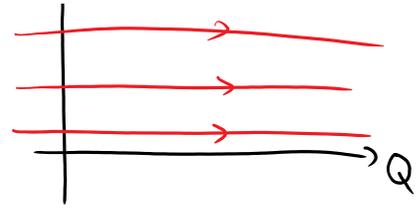
Dann:  $H(Q, P) = \omega P$

$$\dot{P} = - \frac{\partial H}{\partial Q} = 0$$



$$\dot{P} = - \frac{\partial H}{\partial Q} = 0$$

$$\dot{Q} = - \frac{\partial H}{\partial P} = \omega$$



Bew.:

$$0 = \{q, q\} \stackrel{!}{=} \{Q, Q\} = 0 \quad \checkmark$$

$$1 = \{p, q\} \stackrel{!}{=} \{P, Q\}$$

$$= \frac{\partial P}{\partial r} \frac{\partial Q}{\partial q} - \frac{\partial P}{\partial q} \frac{\partial Q}{\partial r}$$

$$= \frac{1}{m\omega r} \operatorname{atan}'\left(m\omega \frac{q}{r}\right) \frac{m\omega}{r}$$

$$+ \frac{1}{\omega} m\omega^2 q \operatorname{atan}'\left(m\omega \frac{q}{r}\right) m\omega q \frac{1}{r^2}$$

$$\stackrel{\curvearrowright}{=} \frac{1}{1 + m^2\omega^2 \frac{q^2}{r^2}} \left( 1 + m\omega^2 \frac{q^2}{r^2} \right) = 1 \quad \checkmark$$

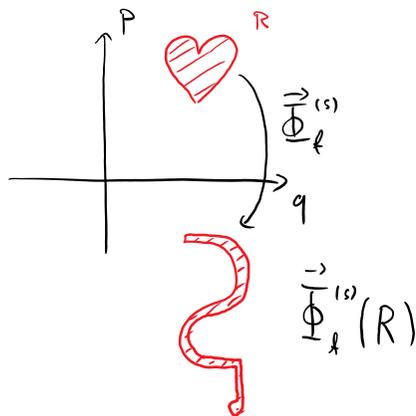
$$\begin{aligned} & \operatorname{atan}'(x) \\ &= \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

$$\left[ \begin{aligned} H(q, r) &= \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 \\ P(q, r) &= \frac{1}{\omega} H(q, r) \\ Q(q, r) &= \operatorname{atan}\left(m\omega \frac{q}{r}\right) \end{aligned} \right]$$

## 8.5.4 Der Satz von Liouville

Satz: Hamiltonsche Flüsse  $\vec{\Phi}_f^{(s)}$  sind kanonisch.

Anwendung: Hamiltonsche Flüsse erhalten Phasenraumvolumen.



Bew.:

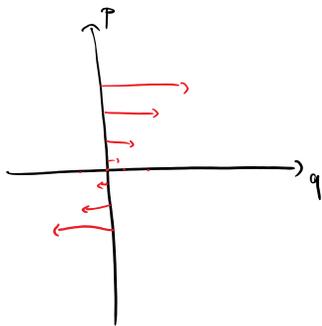
$$\int_{\vec{\Phi}_f^{(s)}(R)} d^{2N} \vec{x} = \int_R |\det A(s)| d^{2N} \vec{x}$$

$$A(s)_{ij} = \frac{\partial (\vec{\Phi}_f^{(s)}(\vec{x}))_i}{\partial x_j} \in Sp(2N)$$

$$= \int_R d^{2N} \vec{x} \quad \text{Eigenschaft (5)}$$

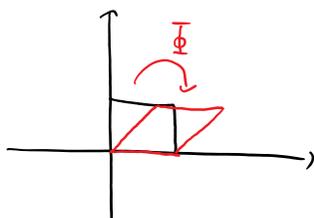
Bsp.: Freie Teilchen ( $N=1$ ):

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m}$$



$$\vec{\nabla} H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ -q \end{pmatrix}$$

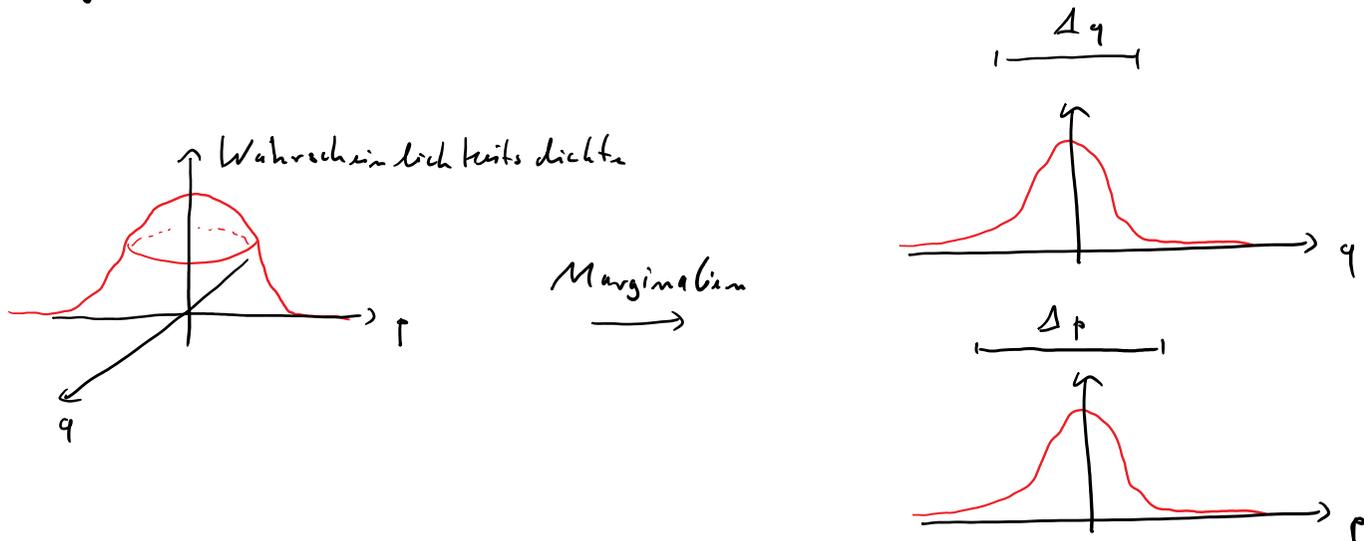
$$\vec{\Phi}_H^{(s)} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q + \frac{p-s}{m} \\ p \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\frac{p-s}{m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= A(s) \in Sp(2)} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \quad \text{Eigenschaft (6)}$$



$A(s)$  ist Scherung, die Volumen, aber nicht Längen oder Winkel erhält.

Ausblick: Quetschungen im Quantenphasenraum

Es gibt Quantenzustände, die bei Orts- und Impulsmessungen die gleiche Statistik liefern, wie Gauß'sche Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf dem Phasenraum:



Auf Grund der Unschärferelation  $\Delta q \Delta p \geq \hbar/2$ , kann die Verteilung nicht beliebig schmal konzentriert sein.

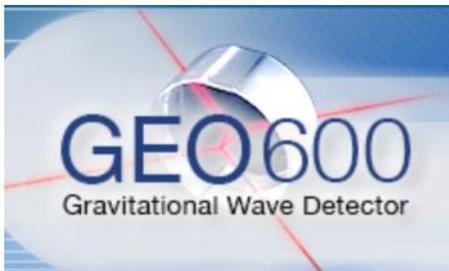
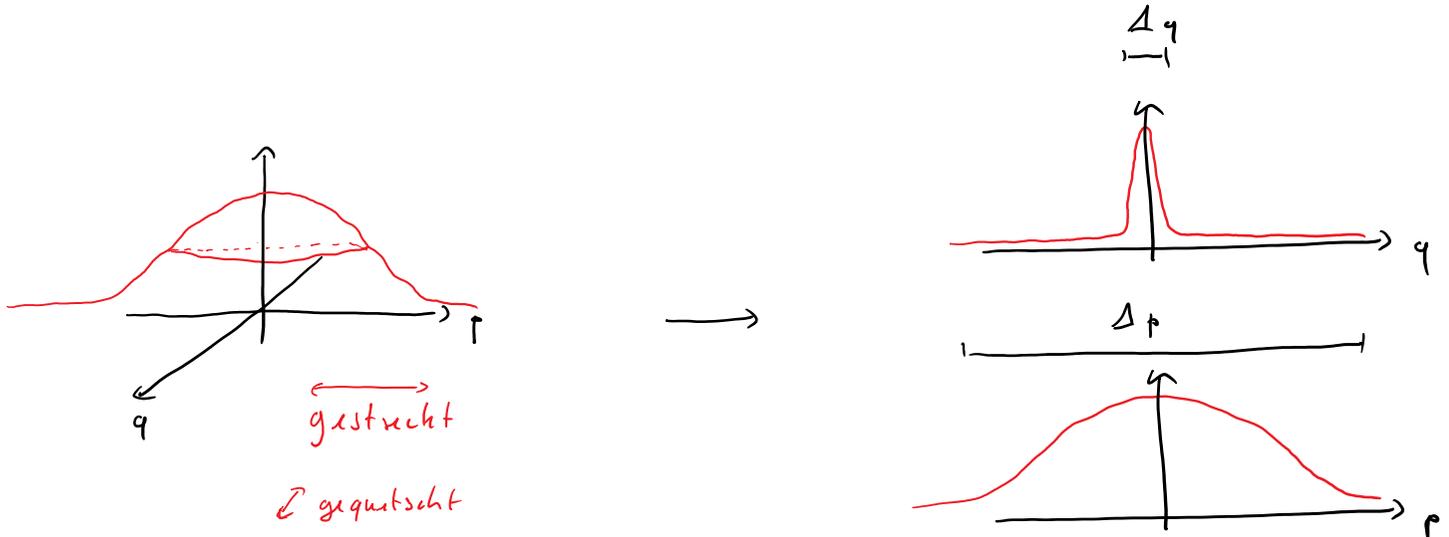
Lineare kanonische Transformationen können quantenmech.

realisiert werden. Bsp.: Rotationen  $\Phi(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{bmatrix} \cdot \vec{x}$

Scherungen  $\Phi(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{s}{m} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \vec{x}$

"Quetschungen"  $\Phi(\vec{x}) = \begin{bmatrix} e^k & 0 \\ 0 & e^{-k} \end{bmatrix} \cdot \vec{x}$

Querschnitte reduzieren Unschärfe entlang einer Achse, auf Kosten der anderen:



Interferometer, die mit "gequastem Licht" arbeiten, erreichen höhere Genauigkeit.

Weltweit führend dabei: GEO600 bei Hannover.

## 8.5.5 Satz von Liouville (Beweis)

Satz: Hamiltonsche Flüsse  $\vec{\Phi}_f^{(s)}$  sind kanonisch.

Beweis Zu zeigen:  $A(s)_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \frac{\partial (\vec{\Phi}_f^{(s)}(\vec{x}))_i}{\partial x_j} \in Sp(2N)$ .

① Betrachte Familie  $A(s) = \mathbb{1} + s \underbrace{M}_{2N \times 2N \text{ Matrix}} + O(s^2)$ .

$$\boxed{0} \stackrel{!}{=} \frac{d}{ds} \Big|_0 (A(s) \mathcal{J} A(s)^T) = \frac{d}{ds} \Big|_0 (\mathcal{J} + s(M\mathcal{J} + \mathcal{J}M^T) + O(s^2))$$

$$= \boxed{M\mathcal{J} + \mathcal{J}M^T}$$

Solche  $M$  heißen

- "infinitesimale sympl. Transf."
- oder
- Elemente der Lie algebra  $sp(2N)$ .

② Für hamilt. Flüsse:

$$\frac{d}{ds} \Big|_0 A(s)_{ij} = \frac{d}{ds} \Big|_0 \frac{\partial (\vec{\Phi}_f^{(s)}(\vec{x}))_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\vec{x} + \mathcal{J} \vec{\nabla} H)_i$$

$$= \delta_{ij} + \sum_k \mathcal{J}_{ik} \underbrace{\frac{\partial^2 H}{\partial x_j \partial x_k}}_{\text{Hesse matrix } \tilde{M}}$$

$$\Rightarrow A(s) = \mathbb{1} + s \underbrace{\mathcal{J} \tilde{M}}_M + O(s^2)$$

Damit:

$$\begin{aligned} M\mathcal{J} + \mathcal{J}M^T &= \mathcal{J} \tilde{M} \mathcal{J} + \mathcal{J} \tilde{M}^T \mathcal{J}^T \\ &= \mathcal{J} \tilde{M} \mathcal{J} - \mathcal{J} \tilde{M} \mathcal{J} = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$= \int \tilde{M} \int - \int \tilde{M} \int = 0. \quad \checkmark$$

③ Nutze:  $\vec{\Phi}_f^{(s+t)} = \vec{\Phi}_f^{(s)} \circ \vec{\Phi}_f^{(t)}$  "eiparametrische Gruppe".

$$\Rightarrow A(s+t) = A(s) A(t)$$

Beweis:

$$A(s+t)_{ij} = \frac{\partial (\vec{\Phi}_f^{(s+t)})_i}{\partial x_j} = \frac{\partial (\vec{\Phi}_f^{(s)}(\vec{\Phi}_f^{(t)}(\vec{x})))_i}{\partial x_j}$$

$$= \sum_k A(s)_{ik} A(t)_{kj} \quad \square$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds} A(s) = \frac{d}{dt} \Big|_0 A(s+t) = \frac{d}{dt} \Big|_0 A(s) A(t) = A(s) M.$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds} (A(s) \int A(s)^T) = A(s) M \int A(s)^T + A(s) \int M^T A(s)^T$$

$$= A(s) \underbrace{\left( M \int + \int M^T \right)}_{=0} A(s)^T = 0. \quad \square$$

8.5.6 Erzeugende Funktionen:  
Hauptaussage

① Wähle Fkt.  $F: \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}$ .

② Definiere  $\vec{Q}(\vec{q}, \vec{p})$  in dem

$$P_i = \frac{\partial F(\vec{q}, \vec{Q})}{\partial q_i} \quad i=1, \dots, N$$

nach  $\vec{Q}$  aufgelöst wird.

③ Setze dann

$$P_i = - \frac{\partial F(\vec{q}, \vec{Q}(\vec{q}, \vec{p}))}{\partial Q_i}$$

Beh.:  $\vec{X}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \vec{Q}(\vec{q}, \vec{p}) \\ \vec{P}(\vec{q}, \vec{p}) \end{pmatrix}$  ist kanonische Trefo.

Bew.:  
( $N=1$ )

$$\{P, Q\} = \frac{\partial P}{\partial p} \Big|_q \frac{\partial Q}{\partial q} \Big|_p - \frac{\partial P}{\partial q} \Big|_p \frac{\partial Q}{\partial p} \Big|_q$$

Dazu:

$$\frac{\partial P}{\partial p} \Big|_q = \frac{\partial P}{\partial Q} \Big|_q \frac{\partial Q}{\partial p} \Big|_q$$

$$\frac{\partial P}{\partial q} \Big|_p = \frac{\partial P}{\partial q} \Big|_Q + \frac{\partial P}{\partial Q} \Big|_q \frac{\partial Q}{\partial q} \Big|_p$$

$$\downarrow \frac{\partial P}{\partial p} \Big|_q \frac{\partial Q}{\partial q} \Big|_p - \frac{\partial P}{\partial Q} \Big|_q \frac{\partial Q}{\partial p} \Big|_q \frac{\partial Q}{\partial q} \Big|_p$$

Def.:

$$p(q, Q) = \frac{\partial F(q, Q)}{\partial q} = \frac{\partial F}{\partial q} \Big|_Q$$

$$\Rightarrow Q(q, p)$$

$$\Rightarrow P(q, Q) = - \frac{\partial F(q, Q)}{\partial Q} = - \frac{\partial F}{\partial Q} \Big|_q$$

$$\Rightarrow P(q, p) = P(q, Q(q, p))$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\partial P}{\partial Q} \Big|_q \frac{\partial Q}{\partial p} \Big|_q \frac{\partial Q}{\partial q} \Big|_p - \left( \frac{\partial P}{\partial q} \Big|_Q + \frac{\partial P}{\partial Q} \Big|_q \frac{\partial Q}{\partial q} \Big|_p \right) \frac{\partial Q}{\partial p} \Big|_q \\
 &= - \frac{\partial P}{\partial q} \Big|_Q \frac{\partial Q}{\partial p} \Big|_q = \frac{\partial Q}{\partial p} \Big|_q \frac{\partial^2 F}{\partial Q \partial q} = \frac{\partial Q}{\partial p} \Big|_q \frac{\partial p}{\partial Q} \Big|_q
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial Q}{\partial Q} = 1.$$

□

Ziel hier ist es, weitere kanonische Transf. zu finden.

— Dazu:

Auch die Hamiltonschen Gleichungen können aus einem Stationaritätsprinzip abgeleitet werden:

$(\vec{q}(t), \vec{p}(t))$  löst Hamiltongl.

⇔ Die Kurve ist stationär für das Funktional

$$(*) \quad \int_{t_0}^{t_1} L(\vec{q}(\cdot), \dot{\vec{q}}(\cdot)) dt = \int_{t_0}^{t_1} (\vec{p}(t) \cdot \dot{\vec{q}}(t) - H(\vec{q}(t), \vec{p}(t))) dt$$

bzgl. Variationen  $\vec{\delta}_q(\cdot), \vec{\delta}_p(\cdot)$  mit  $\vec{\delta}_q(t_0/t_1) = 0$

Bew.: Wie bei ELG ...  $\square$

Ann.: •  $\vec{p}(t_0/t_1)$  muss unter Variationen nicht festgehalten werden.  
• Wenn  $H = \vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} - L$  durch Legendre-Transf. aus einer Lagrange-Fkt. hervorgeht, dann ist der Integrand in (\*) einfach  $L$ . In diesem Fall ist (\*) mit dem zuvor eingeführten Prinzip identisch. (\*) gilt aber allgemein.

Seien nun  $\vec{Q}, \vec{P}$  neue Koordinaten, s.d. es eine Funktion  $F$  auf dem Phasenraum gibt, s.d. entlang jeder Bahn

$$(\square) \quad \vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} = \vec{P} \cdot \dot{\vec{Q}} + \frac{d}{dt} F$$

gilt. Dann ist (für beliebig = Hamilton-Fkt.):



gilt. Dann ist (für beliebiges Hamilton-Fkt.):

$$S'[(\vec{Q}(\cdot), \vec{P}(\cdot))] = S'[(\vec{q}(\cdot), \vec{p}(\cdot))] + \underbrace{F(t_0) - F(t_1)}_{\text{const.}}$$

Da der letzte Term nicht von der Bahn abhängt, ist

$$\rightarrow (\vec{q}(\cdot), \vec{p}(\cdot)) \text{ stationär} \Leftrightarrow (\vec{Q}(\cdot), \vec{P}(\cdot)) \text{ stationär}$$

Aber auch:

$$\begin{array}{ccc} \updownarrow & & \updownarrow \\ q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} & , & \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad \leftarrow \quad Q_i = \frac{\partial H}{\partial P_i} \quad , \quad P_i = -\frac{\partial H}{\partial Q_i} \end{array}$$

In anderen Worten: Wenn  $(\square)$  mit geeignetem  $F$  gilt, sind  $\vec{Q}, \vec{P}$  kanonisch.

(Zumindest lokal) kann man für jede kanonische Transform. ein solches  $F$  finden. Das folgt aus der Theorie der Differentialformen - und soll uns hier nicht weiter beschäftigen...

Sinn dieser Umformulierung ist, dass man die Konstruktion umkehren kann, und aus  $\vec{p}, \vec{q}$  und  $F$  kanonische  $\vec{Q}, \vec{P}$  erzeugen kann.

Das geht so:

① Wähle ein  $F: \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}$ .

② Definiere  $\vec{Q}(\vec{q}, \vec{p})$  in dem

$$p_i = \frac{\partial F(\vec{q}, \vec{Q})}{\partial q_i}$$

nach  $\vec{Q}$  aufgelöst wird.

③ Setze dann

$$P_i(\vec{q}, \vec{p}) = - \frac{\partial F(\vec{q}, \vec{Q}(\vec{q}, \vec{p}))}{\partial Q_i}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F(\vec{q}(t), \vec{Q}(t)) &= \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial F}{\partial Q_i} \dot{Q}_i \\ &= \vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} - \vec{P} \cdot \dot{\vec{Q}}, \end{aligned}$$

aber das ist (□)! Die durch ① - ③ definierten  $\vec{Q}, \vec{P}$  sind also kanonisch!

$F$  ist die Erzeugende des Koordinatenwechsels.

Die Technik kann auf viele Arten verallgemeinert werden

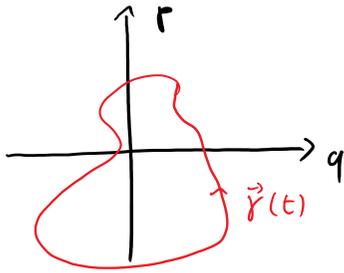
(z.B. auf zeitabhängige Transformationen, oder man kann  $F$  als Fkt. anderer Koordinaten ausdrücken...)

— Ausblick: Mehr zum Wirkungsintegral —

Sei  $N=1$  und

$\uparrow$

$$\vec{y}: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$$



$$\vec{\gamma}: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix}$$

eine geschlossene Trajektorie:  $\vec{\gamma}(0) = \vec{\gamma}(T)$ .

Dann ist

$$\oint_{\gamma} p dq := \int_{t=0}^T p(t) \dot{q}(t) dt = \text{vom } \gamma \text{ eingeschlossene Fläche.}$$

↑  
Satz von Green  
(Stokes)

Da kanonische Transformationen Volumen erhalten, ist

$$\oint_{\gamma} P dQ = \oint_{\gamma} p dq$$

für beliebige kanonische Koordinaten  $(Q, P)$ . (Das folgt auch aus (1) ...).

Die Fläche ist also eine koordinatenunabhängige Eigenschaft der Bahn.

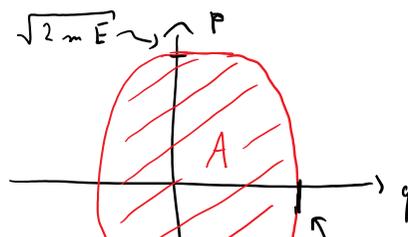
Anfang des 20. Jahrhunderts kam das Wirkungsintegral kurzzeitig zu besonderer Prominenz. Bevor die moderne Quantentheorie entwickelt war, wurde eine ad hoc-Modifizierung der Hamiltonschen Mechanik postuliert:

Die **Bohr-Sommerfeldsche Quantisierungsbedingung** sagt, dass geschlossene Bahnen nur dann realisiert werden können, wenn das Wirkungsintegral ein ganzzahliges Vielfaches des **Planckschen Wirkungsquantums**  $h = 6.63 \times 10^{-34}$  Js ist.

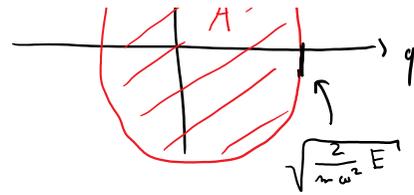
Die klassische Hamiltonmechanik zusammen mit der Quantisierungsbedingung kann für einige quantenmechanische Systeme richtige Vorhersagen machen - z.B. für die Energieniveaus des harmonischen Oszillators und des Wasserstoffatoms. Eine systematische Theorie konnte man auf ihr aber nicht aufbauen. Ab den 1930er Jahren wurde diese "alte Quantentheorie" durch die heute akzeptierte Version

$$\oint_{\gamma} p dq = m h \quad m \in \mathbb{N}$$

Harmonischer Oszillator:



Oszillators und des Wasserstoffatoms. Eine systematische Theorie konnte man auf ihr aber nicht aufbauen. Ab den 1930er Jahren wurde diese "alte Quantentheorie" durch die heute akzeptierte Version ersetzt.



Fläche der Ellipse

$$= \pi E \frac{2}{\omega} \stackrel{!}{=} m h$$

$$\Leftrightarrow E = \frac{h}{2\pi} m \omega = \hbar m \omega$$

## 9.1 Langzeitverhalten dynamischer Systeme

Ziel: Verstehe das Langzeitverhalten dynamischer System.

Beispielfragen:

- Sind Bewegungen periodisch?
- Wie stabil sind Lösungen unter kleinen Störungen?
- Gibt es *universelle* Phänomene, also qualitative Eigenschaften von Lösungen, die nicht vom Detail der Bewegungsgleichungen abhängen?

Ein dynamisches System besteht aus:

- Ein Zustandsraum  $\mathcal{M}$  (z.B.  $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{2N}$ )
- Abbildungen  $\bar{\Phi}^{(t)}$ :  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  mit

$t \in$	$\begin{cases} \mathbb{R} \\ \mathbb{R}_{\geq 0} \\ \mathbb{Z} \\ \mathbb{N}_0 \end{cases}$	reversibel, kontinuierlich
		inversibel, "
		reversibel, diskret
		inversibel, "

so dass

- $\bar{\Phi}^{(0)}(x) = x$
- $\bar{\Phi}^{(t_2)}(\bar{\Phi}^{(t_1)}(x)) = \bar{\Phi}^{(t_2+t_1)}(x)$  "Halbgruppe"

## 9.2 Die Logistische Gleichung

↑  
 "Das Hasen-im-Park-Modell"

$$\mathcal{M} = [0, 1]$$

$\mathcal{M} \ni x$       Hasenpopulation im Grüngürtel

$x = 0$       keine Hasen

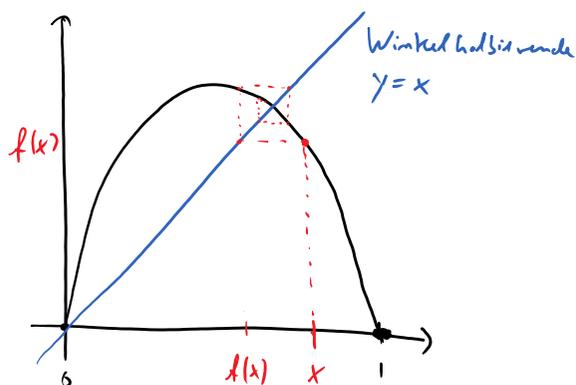
$x = 1$       Maximum

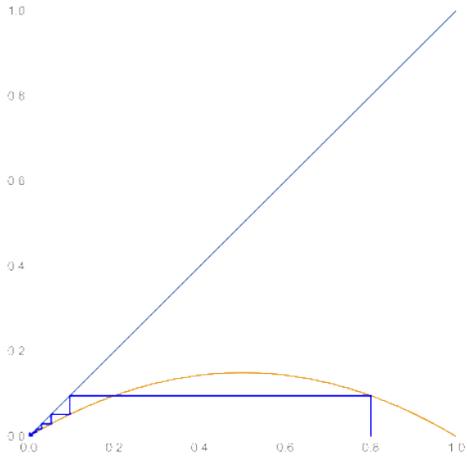
$$t \in \mathbb{N}_0$$

$\Phi^{(t)}(x)$  = Population nach  $t$  Jahren

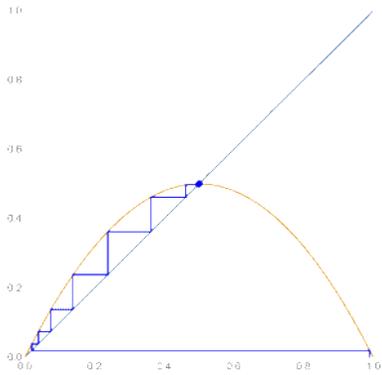
$$\Phi^{(1)}(x) =: f(x)$$

Ausatz:  $f(x) = r \cdot \overset{\substack{\text{potenzielle Eltern} \\ \downarrow}}{x} \cdot \underbrace{(1-x)}_{\text{Populationsdruck}}$

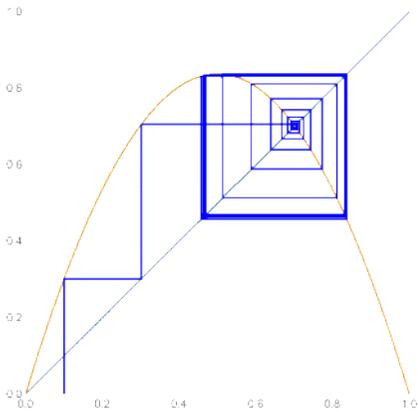




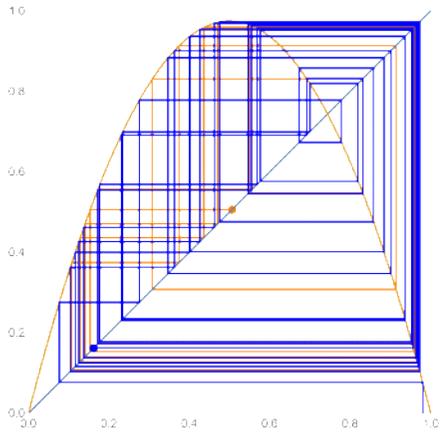
$r < 1 \rightarrow$  exponentielles Schrumpfen.



$r = 2 \rightarrow$  Fixpunkt



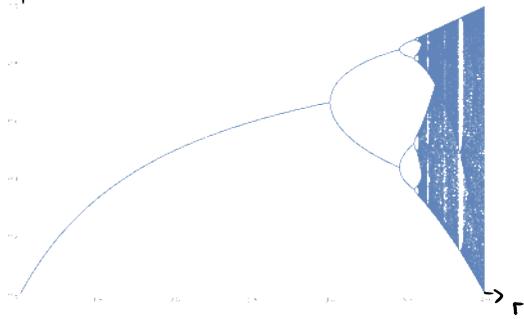
$r = 3,35 \rightarrow$  "Schweinezyklus".



$$r = 3,9$$

- Keine Struktur erkennbar
- Unstabil gegenüber Störungen

Fixpunkte



— Bifurkationsdiagramm —

### 9.3 Periodische Bahnen und Fixpunkte

Sei  $x_0 \in M$ . Die Menge

$$x_0, x_1 = \bar{\Phi}^{(1)}(x_0), x_2 = \bar{\Phi}^{(2)}(x_0) = \bar{\Phi}^{(1)}(x_1), x_3 = \dots$$

heißt die Bahn von  $x_0$  unter  $\bar{\Phi}$ .  
(engl. orbit)

- Die Bahn hat Periode  $p$  wenn  $x_{p-1} = x_0$ .
- Fixpunkt:  $x_0$  mit  $\bar{\Phi}^{(1)}(x_0) = x_0$  ist Bahn mit Periode = 1.

Bsp.: FP der Log. Gl.

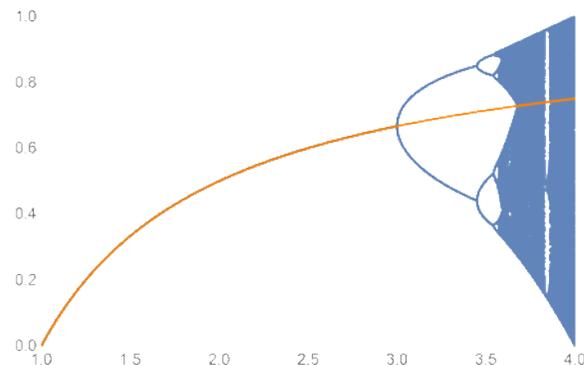
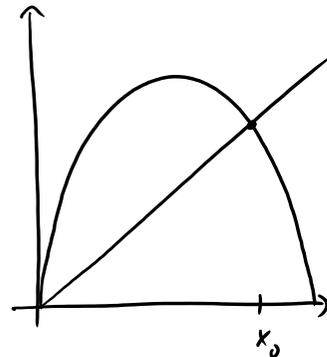
$$f(x_0) \stackrel{!}{=} x_0$$

$$\Leftrightarrow r x_0 (1 - x_0) = x_0$$

$$\Leftrightarrow 1 - x_0 = \frac{1}{r}$$

$\Leftrightarrow$

$$x_0 = 1 - \frac{1}{r}$$



## 9.4 Der Lyapunov-Exponent

Sei  $x_0 \in M$ .

Betrachte Störung  $s$ :

$$\bar{\Phi}(x_0 + s) = \bar{\Phi}(x_0) + \bar{\Phi}'(x_0) \cdot s + O(s^2)$$

$$\bar{\Phi}(\bar{\Phi}(x_0 + s)) = \bar{\Phi}(\underbrace{\bar{\Phi}(x_0)}_{=x_1}) + \bar{\Phi}'(\underbrace{\bar{\Phi}(x_0)}_{=x_1}) \bar{\Phi}'(x_0) \cdot s + O(s^2)$$

⋮

$$\bar{\Phi}^{(p)}(x_0 + s) = \bar{\Phi}^{(p)}(x_0) + \underbrace{\left( \prod_{i=0}^{p-1} \bar{\Phi}'(x_i) \right)}_{\mu} \cdot s + O(s^2)$$

Nehme an:  $x_0$  hat Periode  $p$ .

→  $\mu$  = Produkt der Abl. entlang der Bahn.

$$\bar{\Phi}^{(p \cdot k)}(x_0 + s) = x_0 + \mu^k s + O(s^2)$$

$\lambda := \log |\mu|$  Lyapunov-Exponent.

Damit:

$$\left\{ \begin{array}{ll} |\mu| < 1 \Leftrightarrow \lambda < 0 & \rightarrow \text{stabil} \\ |\mu| > 1 \Leftrightarrow \lambda > 0 & \rightarrow \text{unstabil} \end{array} \right.$$

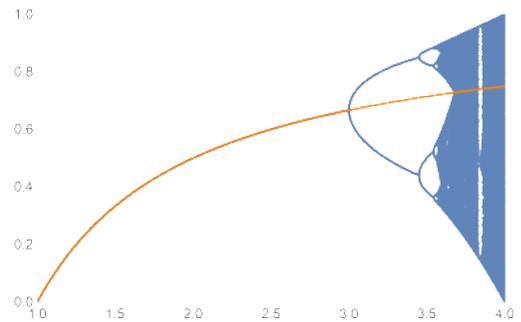
Damit:

$$\begin{cases} |\mu| < 1 \Leftrightarrow \lambda < 0 & \rightarrow \text{stabil} \\ |\mu| > 1 \Leftrightarrow \lambda > 0 & \rightarrow \text{unstabil} \end{cases}$$

Bsp.: FP der log. Gl.

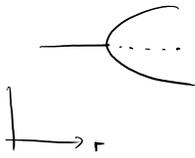
$$x_0 = 1 - \frac{1}{r}, \quad \mu = f'(x_0) = r(1 - 2x_0) = r(1 - 2 + \frac{2}{r}) = 2 - r.$$

$\rightarrow$  Stabil  $\Leftrightarrow r < 3$ .



## 9.5 Bifurkationen

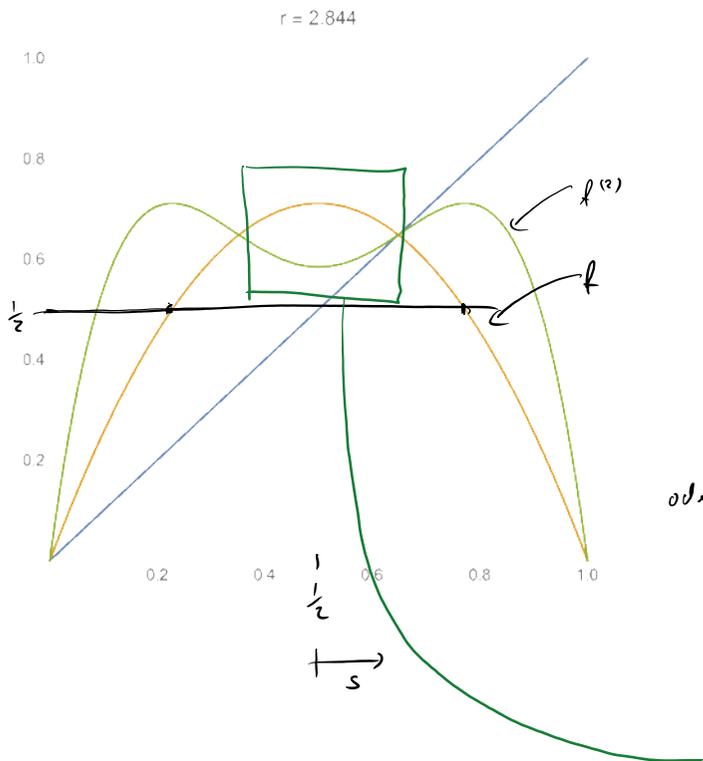
Die "Stimmgabelform" (*pitchfork bifurcation*) kann man alleine durch qualitative Eigenschaften von  $f_r$  und  $f_r^{(2)}$  erklären.



Die ist eine erste *universellen* Eigenschaft der Entstehung von Chaos.

Betrachte  $f_r, f_r^{(2)}$

Ⓘ Extremalpkt.



$f^{(2)}$  hat drei Extrema.

Denn:

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{d}{dx} f(f(x)) \\ = \underline{f'(f(x))} \cdot f'(x)$$

innere Abl. = 0  $\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$  (1 Lsg.)

oder

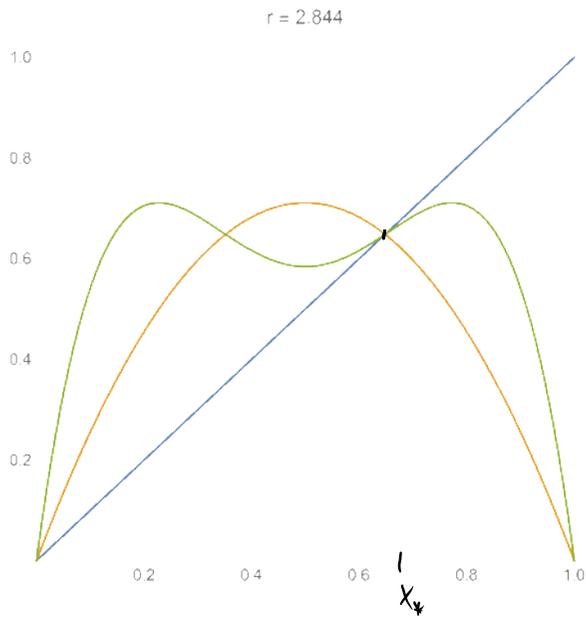
Äußer Abl. = 0  $\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}$  (2 Lsg.)

Im Kasten:

$$f^{(2)}\left(\frac{1}{2} + s\right) \approx f\left(\frac{1}{2}\right) + \underbrace{f\left(\frac{1}{2} + s\right) \cdot f'\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)}_{< 0}$$

$f^{(2)}$  um  $\frac{1}{2}$   $\approx$   $f$  um  $\frac{1}{2}$ ,  
verschoben und y-Achse  
restrikt.

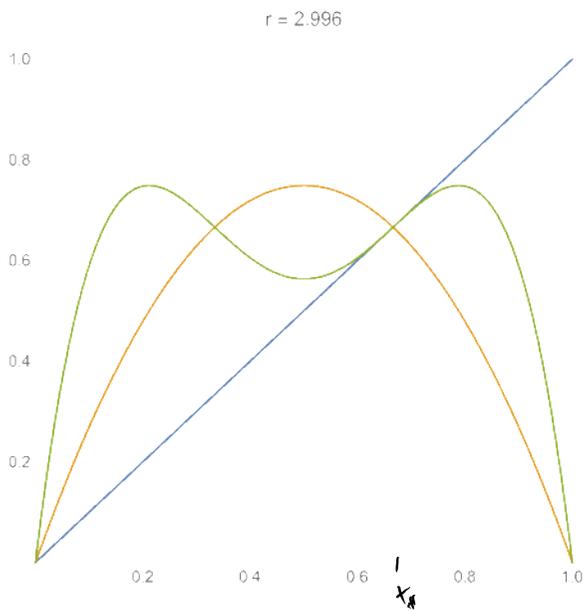
Ⓙ Fixpunkte von  $f, f^{(2)}$



$$\underline{r < 3}$$

$$|f'(x_*)| < 1 \leadsto \text{stabile F.P.}$$

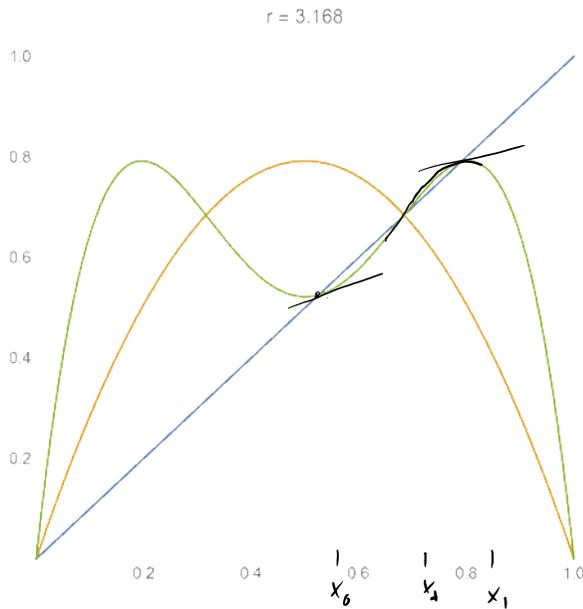
$$\Rightarrow (f^{(2)})'(x_*) = (f'(x_*))^2 < 1$$



$$\underline{r = 3}$$

$$|f'(x_*)| = 1$$

$$\Rightarrow (f^{(2)})'(x_*) = (f'(x_*))^2 = 1$$



$$\Gamma > 3$$

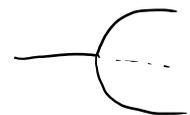
$$\Rightarrow (f^{(2)})'(x_*) > 1$$

$\Rightarrow$  Neu, stabile

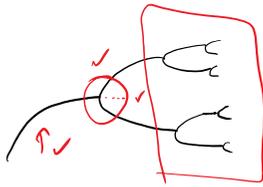
F.P.  $x_0, x_1$  von  $f^{(2)}$   
entstehen.

$\Rightarrow \{x_0, x_1\}$  Periode-2-Bahn von  $f$ .

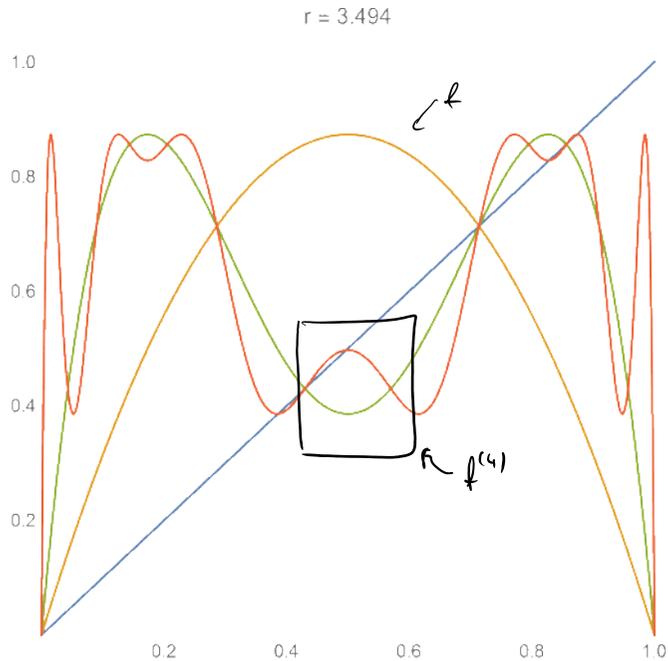
Also,  $f^{(2)}$  hat S'-Form, die

 - Bifurkation erklärt!

## 9.6 Bifurkationskaskaden

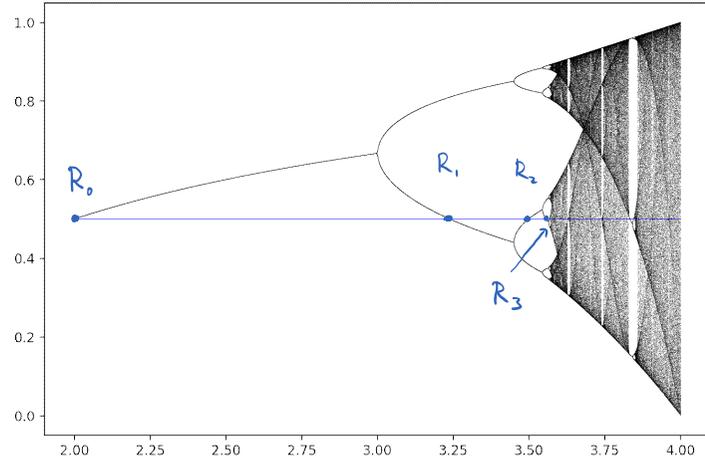
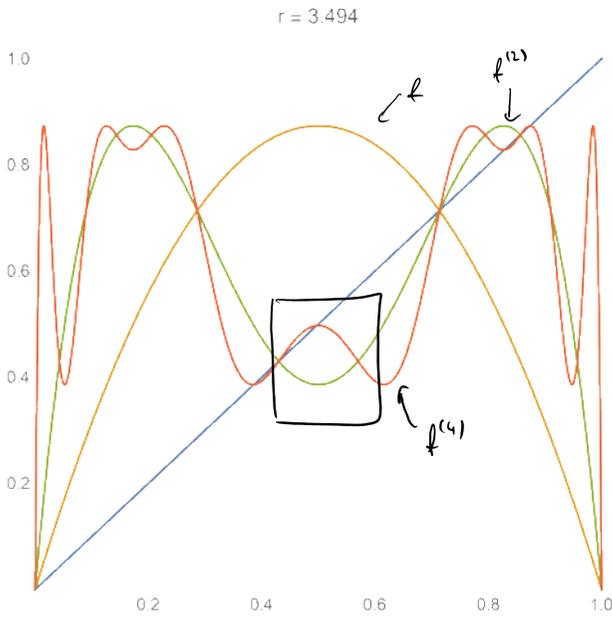


Auch Bifurkationskaskaden sind universell!



- $f^{(4)}$  verhält sich zu  $f^{(2)}$ , wie  $f^{(2)}$  zu  $f$ .
  - $f^{(2)}$  hat um  $x = \frac{1}{2}$  die gleiche Form (bis auf Verschiebung und Skalierung) wie  $f$  um  $\frac{1}{2}$ .
- ⇒ Bifurkationsmechanismus wiederholt sich...  
 ... 2-er Bahnen werden instabil,  
 erzeugen stabil F.P. von  $f^{(4)}$ , ...

## 9.7 Superstabile Bahnen



Beobachtung zuvor:

Um  $x = 1/2$  herum, verhält sich  $f^{2^n}$  wie reskalierte Version  $f^{2^{n-1}}$ .

Ziel hier:

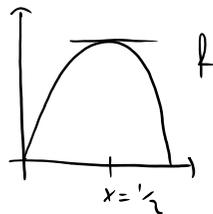
Erfasse diese Selbstähnlichkeit präziser, durch Betrachtung **superstabiler Bahnen**

Def.: Eine Bahn  $x_0, \dots, x_{p-1}$  ist superstabil

$$\mu = \left( f^{(p)} \right)' (x_0) = 0.$$

Erinnerung:

$$\mu = \prod_{i=0}^{p-1} f'(x_i)$$

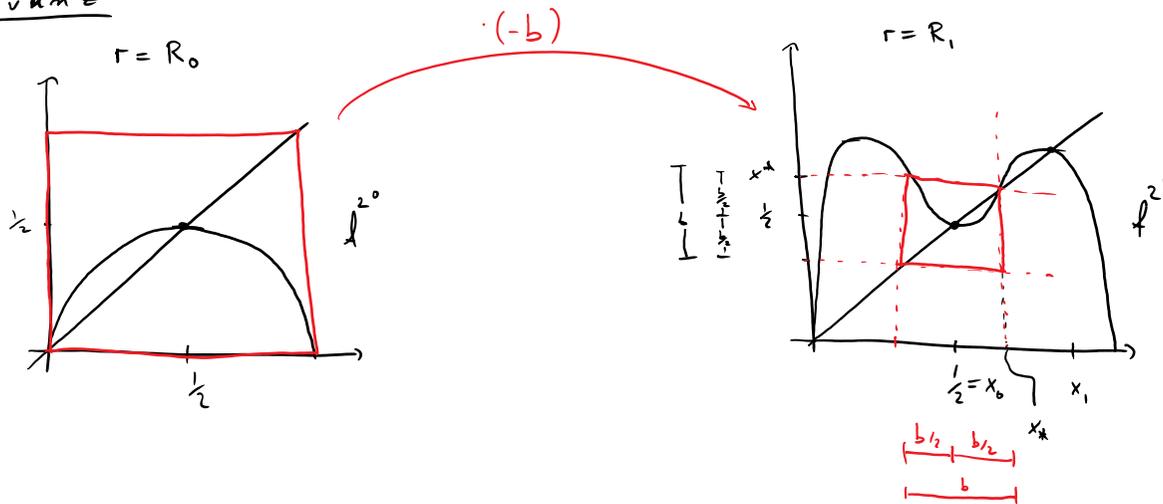


Bahn ist s.s.  $\Leftrightarrow \frac{1}{2} \in \text{Bahn}$ .

Sei  $R_n$  der Wert von  $r$ , wo Bahn mit Periode  $2^n$  s.s. wird.

Sei  $R_m$  der Wert von  $r$ , wo Bahn mit Periode  $2^m$  s.s. wird.

### Relevanz



Informierte Hoffnung: Mit  $a = 1/b$ , Fkt.

$$a_m \left( f_{R_m}^{2^m} \left( \frac{1}{2} + \frac{s}{a_m} \right) - \frac{1}{2} \right)$$

ähneln sich.

Hoffe weiter: Es gibt ein  $\alpha \in \mathbb{R}$ , s.d. für alle  $i$ :

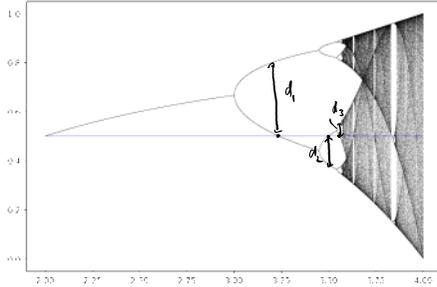
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^m \left( f_{R_{m+i}}^{2^m} \left( \frac{1}{2} + \frac{s}{(-\alpha)^m} \right) - \frac{1}{2} \right) =: g_i(s)$$

existiert.

## 9.8 Feigenbaum-Universalität

Überraschende Erkenntnis: Der Skalenfaktor  $\alpha$  ist universell:

Sein *exakter* numerischer Wert hängt nur von der Ordnung des Maximums von  $f$  ab.



$$\frac{d_i}{d_{i+1}} \rightarrow \alpha = 2,5029 \dots$$

Argumentiere mit

$$g_i = \lim_{m \rightarrow \infty} (-\alpha)^m \left( \underbrace{f_{R_{m+1}} \left( \frac{1}{2} + \frac{s}{(-\alpha)^m} \right) - \frac{1}{2}} \right)$$

Nur Werte von  $f$  um  $x = \frac{1}{2}$  herum gehen ein.

$$\text{Taylor: } f\left(\frac{1}{2} + s\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) + a_2 s^2 + \underbrace{\sum_{i \geq 2} a_i s^i}_{\text{vernachlässigbar.}}$$

Für  $z$  gerade,  $a_2 < 0$ .

vernachlässigbar.

Damit: Definiere Dopplungsfunktional

$$T[g](s) = (-\alpha) g\left(g\left(\frac{s}{-\alpha}\right)\right)$$

$$\Rightarrow T[g_i] = \dots = g_{i-1}$$

$$\Rightarrow \text{Mit } \alpha := \lim \alpha_i \quad \text{gilt}$$

$\Rightarrow$  Mit  $g := \lim_{i \rightarrow \infty} g_i$  gilt

$$g(s) = T[g](s) = (-2)g\left(g\left(\frac{s}{-2}\right)\right) \quad (\bar{F}C)$$

Feigenbaum-Cvitanovic-Gl.

Fakt:  $(\bar{F}C)$  legt  $\alpha$  eindeutig fest.

(Analogie zu Eigenwerten in der L.A.)

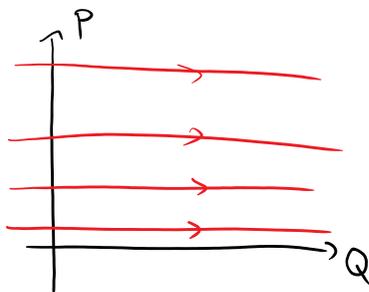
Zur Berechnung: Wähle Potenzreihenansatz  $g(s) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i s^i$  und setze ein.

## 10.1 Integrabilität

$$H(Q, P) = \omega P$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q} = 0$$

$$\dot{Q} = -\frac{\partial H}{\partial P} = \omega$$



Zuvor gezeigt: Fluss des harmonischen Osz. kann durch kanonische Trafo "geglättet" werden.

Allgemeiner: Gegeben System mit  $N$  FHG. Schön wäre eine kanonische Trafo  $(\vec{q}, \vec{p}) \mapsto (\vec{\vartheta}, \vec{I})$  s.d.  $H = H(\vec{I})$  nicht von den  $\vartheta$ 's abhängt.

Dann:

① Die BwGls

$$\dot{\vartheta}_i = \frac{\partial H}{\partial I_i}, \quad \dot{I}_i = -\frac{\partial H}{\partial \vartheta_i} = 0$$

sind direkt lösbar ("integrierbar"):

$$I_i(t) = I_i(0), \quad \vartheta_i(t) = \omega_i t \quad \text{mit} \quad \omega_i = \frac{\partial H}{\partial I_i}(\vec{I}(0)).$$

②  $\Rightarrow I_i$  EHG

③  $\Rightarrow$  Da die Trafo kanonisch ist,  $\{I_i, I_j\} = 0$ .

Man sagt dazu:  $I_i$  stehen in Involution.

Def.: System mit  $N$  FHG ist integrabel wenn es  $N$  unabh.  
EHG  $F_1, \dots, F_N$  gibt, die zueinander in Involution stehen.

Dann [Arnold-Liouville]: Es gibt eine kon. Trans.

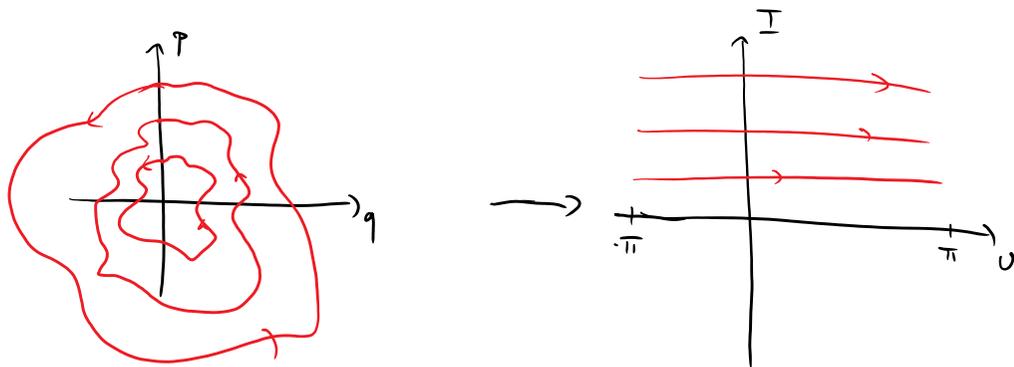
$$\vec{J}(q, p), \quad \vec{I}(\vec{F}(\vec{q}, \vec{p}))$$

s.d.  $H = H(\vec{I})$ .

## 10.2 Beispiele für integrable Systeme

- ① Da  $H$  erhalten ist, und  $\{H, H\} = 0$ , sind alle Systeme mit  $N=1$  integrabel.

Geometrisch:



- ② Teilchen im Zentralpotential.

EHGs:

- $H$
- $L_x, L_y, L_z$

Aber: Drehimpuls k. nicht in Involution.  $\{L_x, L_y\} = -L_z$  <sup>und</sup> (zyklisch).

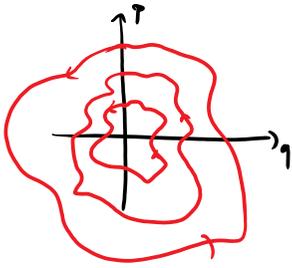
Trick: Betrachte  $F_1 = H$ ,  $F_2 = \|\vec{L}\|^2$ ,  $F_3 = L_z$ .

$$\text{Dann: } \{F_2, F_3\} = \{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2, L_z\}$$

$$= 2 L_x \{L_x, L_z\} + 2 L_y \{L_y, L_z\}$$

$$= 2 L_x L_y - 2 L_y L_x = 0. \quad \ddot{\smile}$$

### 10.3 Tori und Poincaré-Schnitte

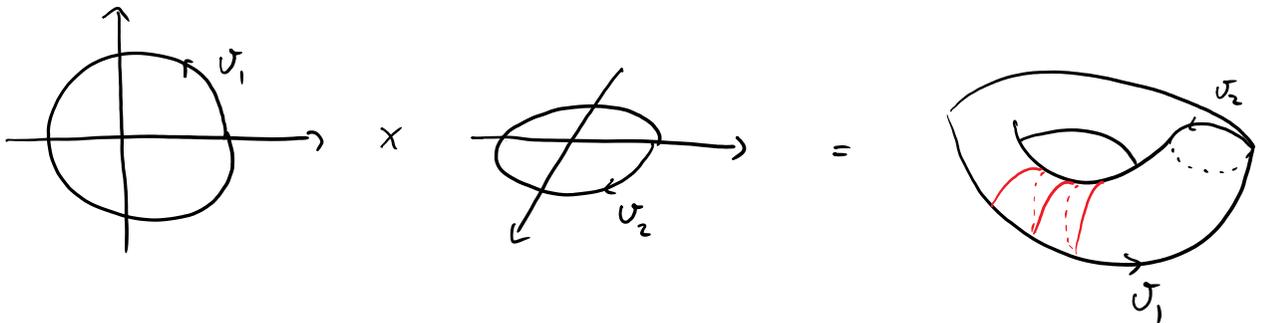


Bahnen für  $N=1$ .

Wie sehen gebundene Bahnen Hamiltonscher Systeme für  $N=2$  aus?

Zunächst: int. Systeme.

$$\varphi_i(t) = \varphi_i(0) + \omega_i t \quad \in [-\pi, \pi]$$



Zwei Fälle:

①  $\omega_1$  und  $\omega_2$  im rationalen Verhältnis.

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{k}{l} \in \mathbb{Q} \quad \Rightarrow \quad \text{Für } t \text{ V.F. von } \frac{2\pi}{\omega_2} \cdot l \text{ fällt } \vec{\varphi}(t) \text{ auf sich selbst.}$$

$\Rightarrow$  1-D Kurve  $\subset$  2-D Torus  $\subset$  4-D Phasenraum

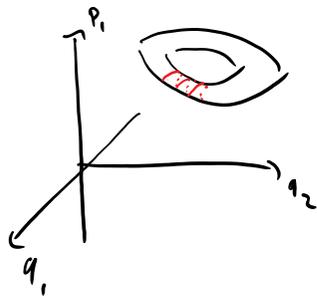
"Resonanter Torus".

$$\textcircled{\text{II}} \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{Q} \quad \Rightarrow \quad \overline{\text{Kurve}} = \text{Torus.}$$

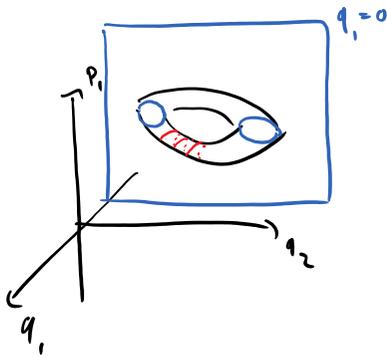
Allgemeiner: Zur Darst. von Kurven  $\begin{pmatrix} \vec{q} \\ \vec{p} \end{pmatrix}(t) \in \mathbb{R}^4$ .

1. Schritt Nutze Energieerh.  $H(q_1, q_2, p_1, p_2) = E. \quad (*)$

$\Rightarrow$  Gegeben  $(q_1, q_2, p_1) \rightarrow$  generisch kann  $(*)$  nach  $p_2$  aufgelöst werden.

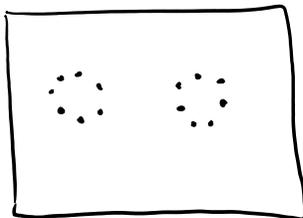


2. Schritt Oft, übersichtlicher mit 2-D Ebene zu schneiden.

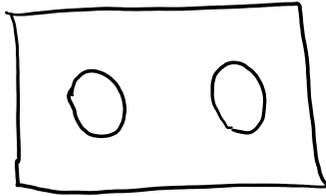


$\rightarrow$  "Poincaré-Schnitt".

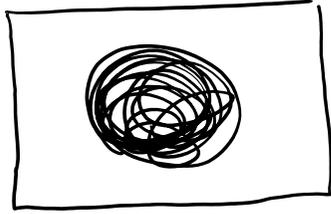
Erwartete Bilder



$\rightarrow$  Integabel, resonant.



→ Integrabel, nicht res.



→ nicht integrabel.

Es ergibt sich folgendes Bild: Die Bahnen eines integrablen Systems mit  $N$  Freiheitsgraden sind (quasi-)periodisch, und liegen auf  $N$ -dimensionalen Tori im  $2N$ -dimensionalen Phasenraum.

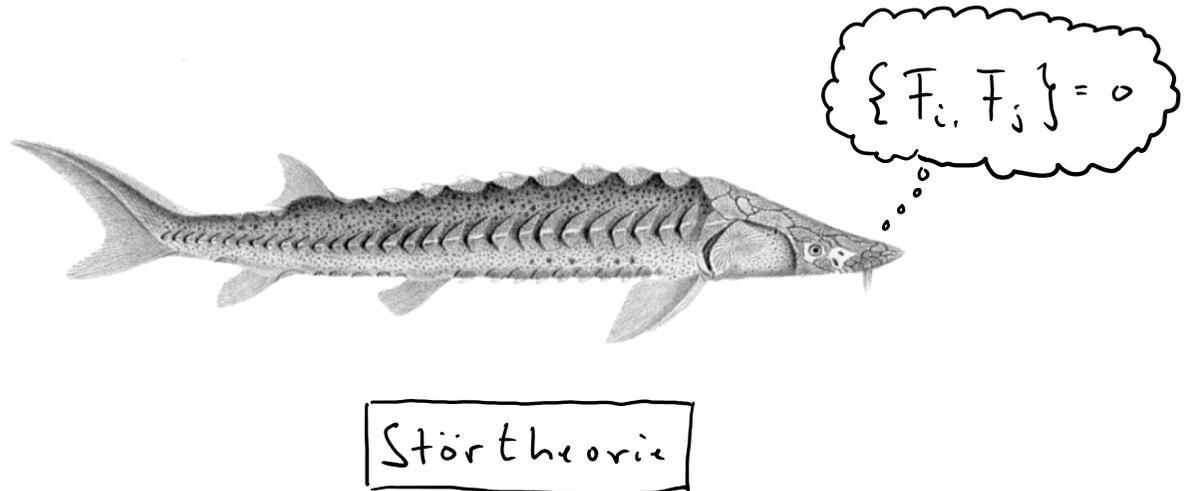
Integrale Systeme gelten als das Musterbeispiel geordneter Bewegung (wie chaotisches Verhalten aussieht, werden wir später sehen).

Die Rechnung, die die Integrabilität eines Teilchens mit Zentralpotential gezeigt hat, lässt sich leicht auf  $n$  Teilchen im Zentralpotential verallgemeinern (jedes neue Teilchen hat 3 FHG - aber seine Energie, seine Drehimpuls-z-Komponente und sein Gesamtdrehimpuls sind drei EHGs; alle stehen in Involution zueinander). Wenn man die Kräfte zwischen den Planeten vernachlässigt, ist das Sonnensystem also integrabel. Da diese Kräfte klein sind - verglichen mit der Anziehungskraft der Sonne - kann man versuchen, das Sonnensystem als "Störung" eines idealen, integrablen Systems mit Hilfe der klassischen Störtheorie zu behandeln. Für lange Zeit war es eine der heißesten Fragen der Physik (und Mathematik), ob schwach gestörte Systeme weiterhin quasi-periodische Orbits auf Tori haben. In der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts gab das KAM-Theorem im Prinzip eine positive Antwort darauf - allerdings unter vielen restriktiven Bedingungen (z.B. überleben resonante Tori nicht), und nur für sehr kleine Störungen. In unserem Sonnensystem sind die Kopplungen zwischen den Planeten zu stark - selbst wenn die Sonne unendlich lang scheinen würde, würde das System nicht überleben (tut mir Leid, die schlechte Nachricht überbringen zu müssen).

Während die Himmelsmechaniker des 19. Jahrhunderts zeigen wollten, dass mechanische Systeme stabil und integrabel sind, hoffte eine andere Gruppe auf das gegenteilige Resultat: Die junge statistische Physik. Boltzmann hatte vorgeschlagen, makroskopische Systeme so zu beschreiben, als würden sie zufällig jeden Zustand annehmen, der mit der Gesamtenergie kompatibel ist. Mit Hilfe dieses Axioms konnte man die Vorhersagen der Thermodynamik erklären - eine äußerst erfolgreiche Theorie, die aber bis dahin keine mikroskopische Rechtfertigung hatte. Das Problem ist nur: Warum war Boltzmanns Annahme gerechtfertigt? Dies ist eine Diskussion, die bis heute anhält. Ein früher Erklärungsansatz war die **Ergodenhypothese**. Sie besagt, dass die Trajektorien mechanischer Systeme alle mit der Energie verträglichen Zustände gleich häufig durchlaufen. Die Mittlung über zufällige Zustände in der statistischen Physik kann man dann als Zeitmittlung über eine Trajektorie verstehen. Sind mechanische Systeme ergodisch? Integrale sind das sicher nicht! Die Menge der Zustände gegebener Energie ist  $(2N-1)$ -dimensional, die Tori integraler Systeme haben aber nur  $N$  Dimensionen. Ein integrables System kann

"die meisten" Zustände gegebener Energie also nie erreichen. Aber vielleicht sind integrable Systeme die Ausnahme...

Welche mechanischen Systeme sind nun integrabel, stabil, chaotisch, ergodisch? Dies sind sehr schwierige Fragen, die bis heute nicht vollständig verstanden sind. Seit Mitte der 70er Jahre spielen Computersimulationen eine große Rolle für diese Probleme. Das werden wir uns als nächstes ansehen...



## 10.4 Chaos im Hénon-Heiles-System

THE ASTRONOMICAL JOURNAL VOLUME 69, NUMBER 1 FEBRUARY 1964

**The Applicability of the Third Integral Of Motion:  
Some Numerical Experiments**

MICHEL HÉNON\* AND CARL HEILES  
Princeton University Observatory, Princeton, New Jersey  
(Received 7 August 1963)

The problem of the existence of a third isolating integral of motion in an axisymmetric potential is investigated by numerical experiments. It is found that the third integral exists for only a limited range of initial conditions.

1. INTRODUCTION

In the present case, two isolating integrals are known:

**T**HERE has recently been a renewal of interest in the question of the existence of the third integral of galactic motion (Contopoulos 1957, 1958,

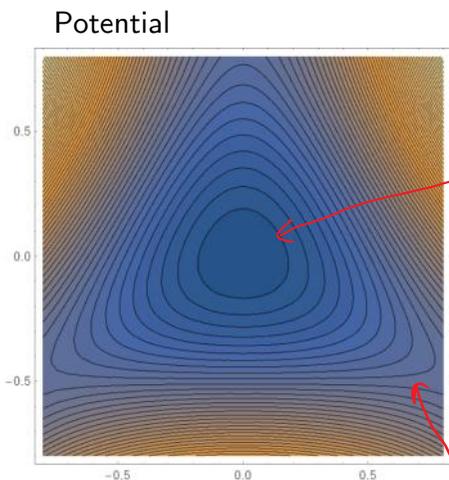
$$I_1 = U_\phi(R, z) + \frac{1}{2}(\dot{R}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2), \quad (2)$$

$$I_2 = R^2\dot{\theta}. \quad (3)$$

"Star in cylindrically symmetric galactic potential".

$$H = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2} (q_1^2 + q_2^2) + \underbrace{q_1^2 q_2 - \frac{1}{3} q_2^3}_{\text{anharmonische Terme}}$$

harmonisches Potential



$q_1, q_2$  klein  $\rightarrow$  Terme 3. Ordnung vernachlässigbar  
 $\rightarrow$  harmonisches Potential  
 $\rightarrow$  integrables Verhalten

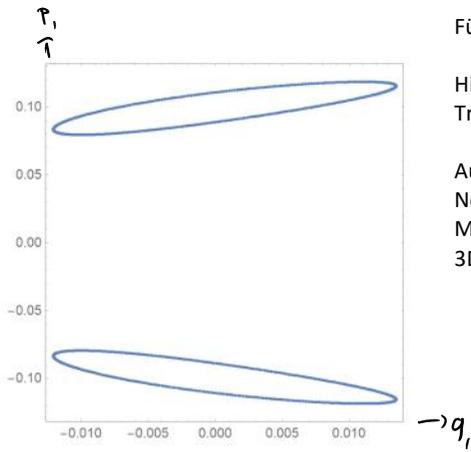
$q_1, q_2$  groß  $\rightarrow$  anharmonische Terme  
 $\rightarrow$  Verhalten unklar.

Numerik:

Mathematica: Löse DGL numerisch  
 (Code auf Webseite)

```
solveHenons[x0_, y0_, py_, e_, tF_] := Reap@NDSolve[{{
  y1'[t] == y3[t],
  y2'[t] == y4[t],
  y3'[t] == -y1[t] (1 + 2 y2[t]),
  y4'[t] == -y2[t]^2 + (-1 + y2[t]) y2[t]},
  {y1[0] == x0, y2[0] == y0, y3[0] == Sqrt[2/3 y0^3 + 2 e - x0^2 - y0^2 - 2 x0^2 y0 - py^2], y4[0] == py}},
  {y1[t], y2[t], y3[t], y4[t]}, {t, tF}, Method -> {"EventLocator", "Event" -> y1[t], "EventAction" -> Sow[{y2[t], y4[t]}], "EventLocationMethod" -> "LinearInterpolation",
  "Method" -> {"SymplecticPartitionedRungeKutta", "DifferenceOrder" -> 4, "PositionVariables" -> {y1[t], y2[t]}}},
  StartingStepSize -> 0.25, MaxSteps -> Infinity]
```

$q_1(0)$   $q_2(0)$   $p_1(0)$   $E_2$   $\downarrow$   $E_2$   $\downarrow$   $\downarrow$   $\downarrow$   $\downarrow$   $\downarrow$   
 visualize[0.02, 0.02, 0.1, 0.02, 5000]



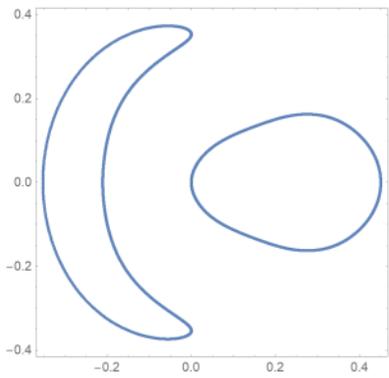
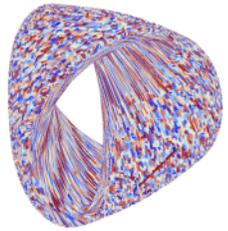
$\uparrow$   
 $q_1, q_2, p_1$  Raum

Für kleine Energie erwarten wir integrables Verhalten.

Hier zu sehen ist nicht-resonanter Torus. Links ist die Trajektorie in 3D, rechts der Poincare-Schnitt.

Auf der Webseite des Kurses ist das Mathematica-Notebook zum Herunterladen bereitgestellt. Mit Mathematica (z.B. im CIP-Pool nutzbar) kann man die 3D-Trajektorie drehen.

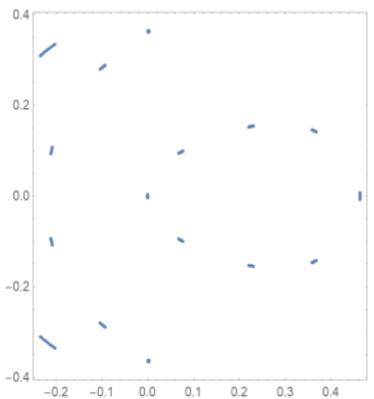
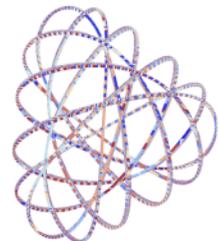
visualize[0, 0, 0, 1/12, 20000]



Andere Anfangsbedingungen, immer noch niedrige Energie.

Der Torus ist verzerrt. Das ist weiterhin mit integrelem Verhalten kompatibel: erst nach einem kanonischen Koordinatenwechsel erhält man den "Standard-Donut".

visualize[0, 0, 0, 0.088, 2000]



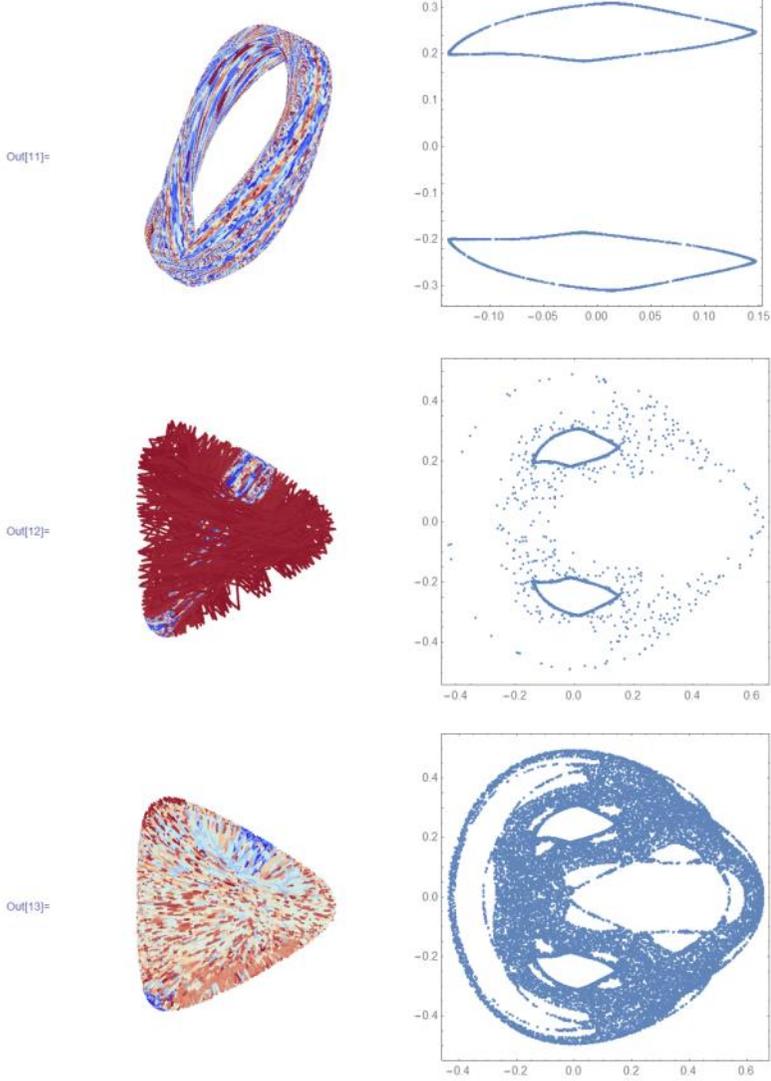
Ein resonanter Torus.

Schön, ne?

```

In[11]= visualize[0.02, 0.02, 0.19, 1 / 8, 20000]
        visualize[0.02, 0.02, 0.19, 1 / 8, 30000]
        visualize[0.02, 0.02, 0.19, 1 / 8, 100000]

```



Jetzt wird's spannender.

Wir wählen eine höhere Energie.

Nach 20k Zeiteinheiten sieht die Trajektorie und der Poincare-Schnitt noch integrabel aus.

...nach 30k Zeiteinheiten verlässt die Trajektorie den Torus!

(Achtung: Die Skalierung der Achsen hat sich verglichen mit dem letzten Bild geändert).

...nach 50k Zeiteinheiten sehen wir nun eindeutig nicht-integrables Verhalten.

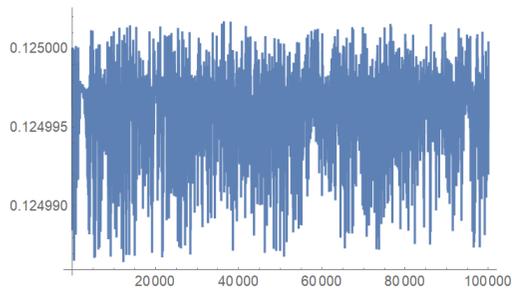
Der Poincare-Schnitt ist eine komplizierte zwei-dimensionale Fläche. Der topologische Abschluss der Trajektorie ist also eine drei-dimensionale Untermenge des vierdimensionalen Phasenraums. Da ein Torus zwei-dimensional ist, haben wir den integrablen Bereich hiermit verlassen.

Das Muster sieht nicht so aus, als ob man eine analytische Beschreibung finden könnte! Tatsächlich treten in solchen Probleme häufig fraktale Muster auf.

Interessant ist, dass wir während der ersten 20k Zeiteinheiten keine Spur von Chaos gesehen haben. Das sollte uns nachdenklich stimmen: Es zeigt, dass es nicht leicht ist, aus numerischen oder empirischen Beobachtungen auf Ordnung zu schließen. Man kann nur hoffen, dass der Keim des Chaos in unserem Sonnensystem nicht gleichermaßen angelegt ist.

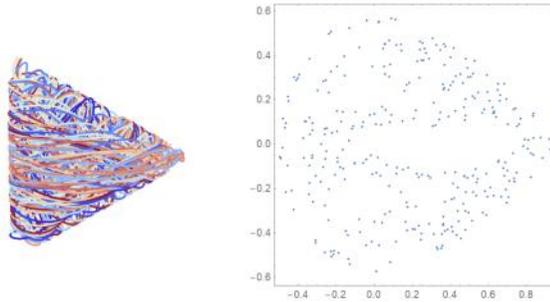
Noch ein Konsistenzcheck: Wenn man Differentialgleichungen für lange Zeiten numerisch integriert, können sich numerische Fehler aufaddieren. Vielleicht ist der späte Anfang des Chaos einfach ein Artefakt, weil der Löser durch numerische Fehler mehr und mehr Energie in das System pumpt. Wir plotten also Energie über Zeit für 100k Zeiteinheiten. Das Diagramm unten zeigt, dass Energie im Rahmen kleiner numerischer Fehler erhalten bleibt. Gut.

```
Plot[Evaluate[energyHenons[solveHenons[0.02, 0.02, 0.19, 1/8, 100000]]], {t, 0, 100000}]
```



```
In[16]:= visualize[0.02, 0.02, 0.19, 1/6, 1000]
```

Out[16]=

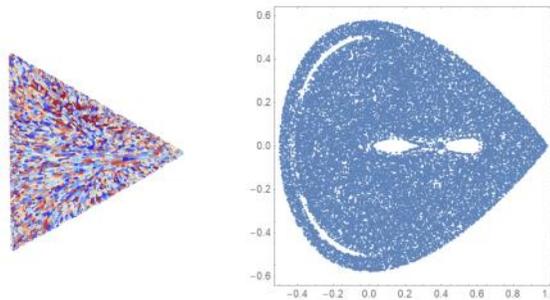


Wir erhöhen die Energie weiter.  $E=1/6$  ist die höchste Energie, bei der die Lösungen noch gebunden sind.

Oben: 1k Zeiteinheiten, unten 100k Zeiteinheiten.

```
In[17]:= visualize[0.02, 0.02, 0.19, 1/6, 100000]
```

Out[17]=

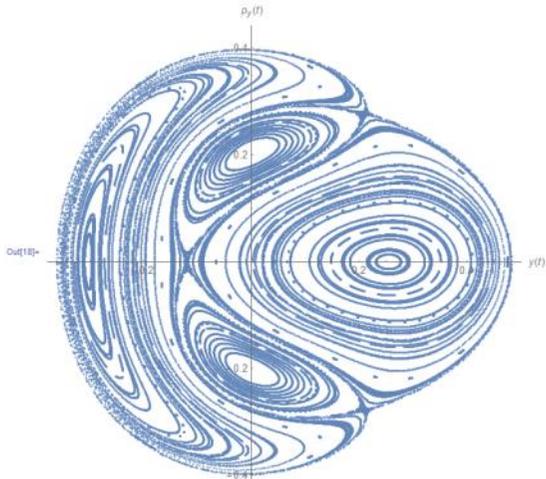


Im Poincaré-Schnitt scheinen bis auf vier weiße Regionen alle Bereiche gleichmäßig bedeckt zu sein. Eine "glatte Struktur" ist nicht mehr erkennbar.

```

In[18]: surfaceOfSectionEnergy[1/12, 5000, 50]
surfaceOfSectionEnergy[1/8, 5000, 50]
surfaceOfSectionEnergy[1/6, 5000, 50]

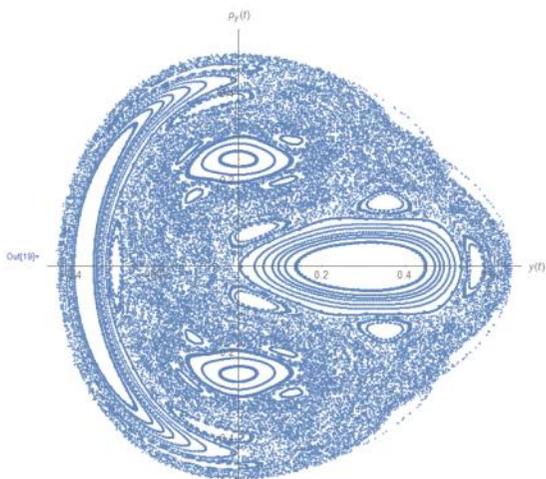
```



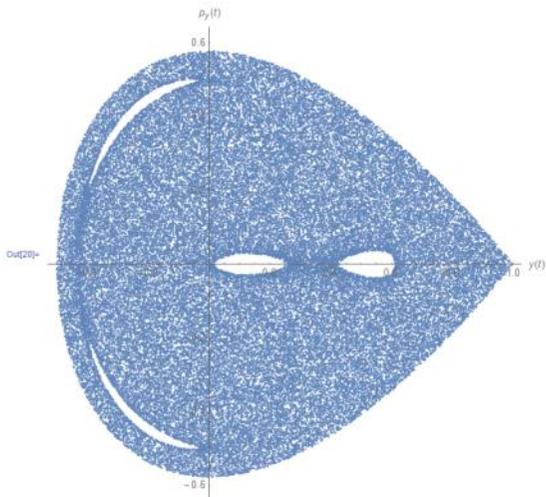
In den drei Diagrammen sind jeweils 50 Trajektorien mit gegebener Energie und zufälligen Anfangsbedingungen für je 5k Zeiteinheiten aufgetragen.

Die Energien sind:  $1/12$ ,  $1/8$ ,  $1/6$ .

Bei  $E=1/12$  sieht man glatte Trajektorien, mit einigen Resonanzen.



Bei  $E=1/8$  verbleiben einige wenige glatte Bahnen. Die meisten ergeben jedoch chaotische Bilder.



Bei  $E=1/6$  sind keine glatten Bahnen mehr erkennbar.

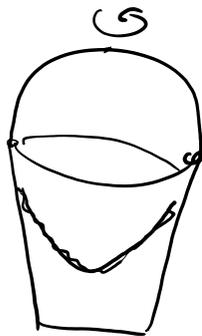
Interessant ist: Das Portrait der 50 zufälligen Bahnen hier sieht genauso aus, wie das Portrait der einen Bahn für  $E=1/6$ , die wir oben geplottet haben. Dieses Verhalten (Zeitmittel einer Bahn entspricht zufällig gewählten Punkten mit gegebener Energie) scheint ergodisch zu sein.

# 1. Online-Veranstaltung

Thursday, November 5, 2020 9:11 AM

## Themen:

- Orga
- Kriechlösungen ✓
- Grundlagen:
  - Legt die Gegenwart die Zukunft fest? ✓
  - Träge vs schwere Masse. "No fine-tuning". ✓
  - Das Machsche Prinzip ✓

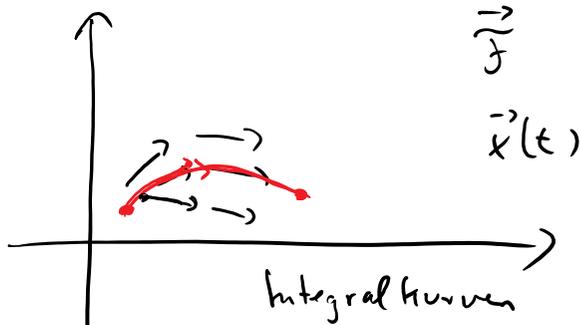


①



②





$\vec{f}$   
 $\vec{x}(t)$

Integral Kurven

Bsp.: •  $\vec{f}$  ist Strömungsfeld

•  $\vec{x}(t)$  Pfad eines leichten  
 Teilchens

Erinn.: Liniärint.

$$\int_{t_0}^{t_1} \left( \vec{f}(\vec{x}(t)), \frac{d\vec{x}}{dt} \right) dt$$



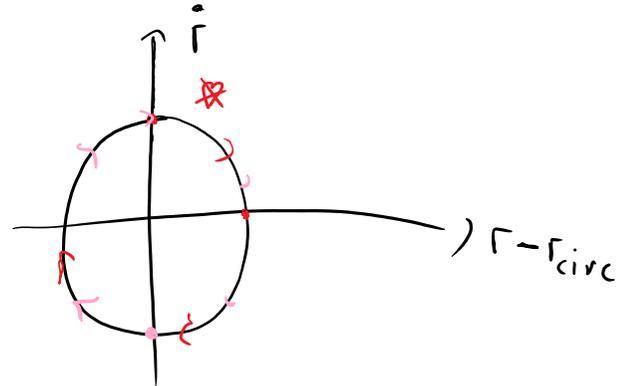
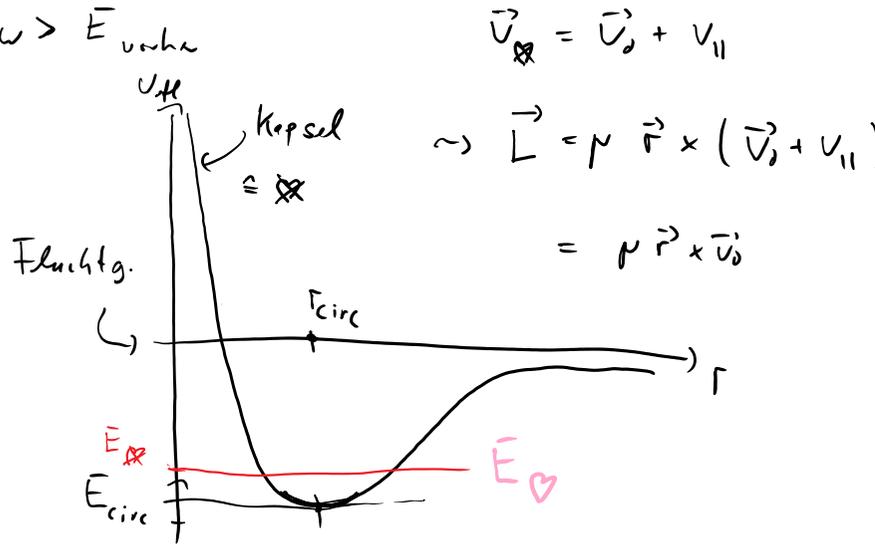
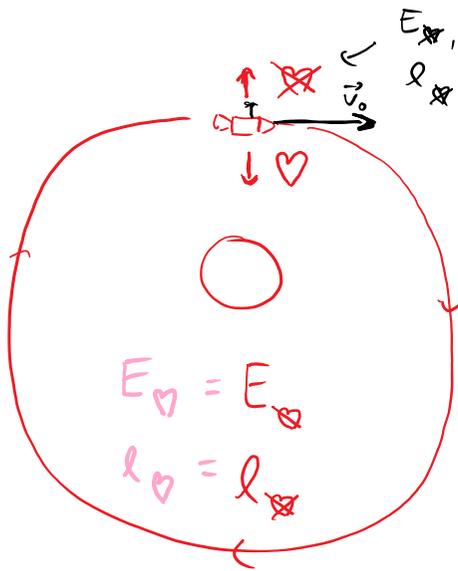
**Themen:**

• **Flaschenpost aus der Umlaufbahn**

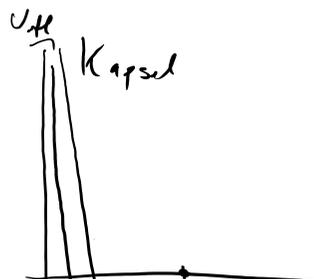
Die Tücken von Liebesgeschichten und Trennungsschmerz im Orbit

• **Das Anthropische Prinzip am Beispiel des 1/r-Potentials**

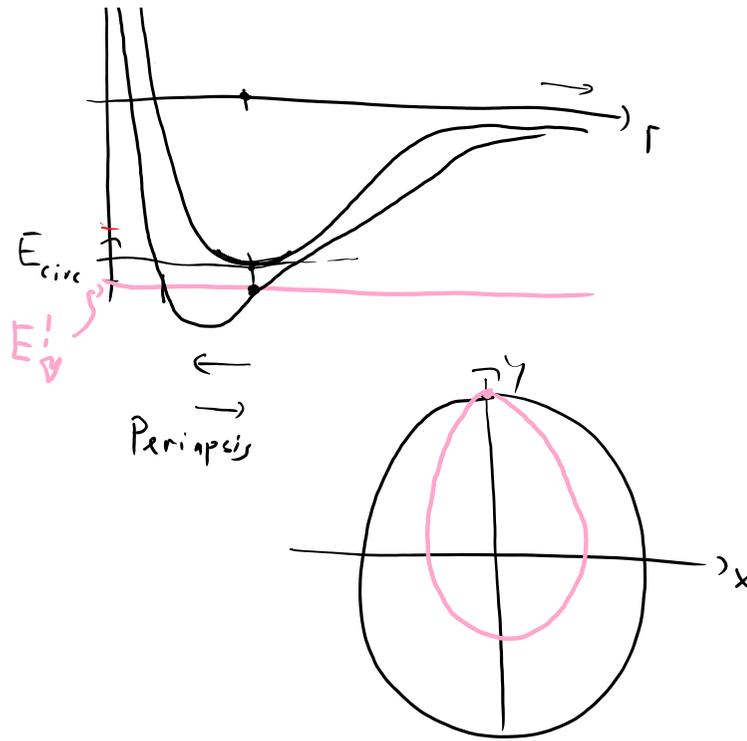
Tiefe Erklärung oder wissenschaftstheoretische Leistungsverweigerung?



Bremsmanöver:



$E_{\heartsuit}^! < E_{\text{vorher}}$   
 $l_{\heartsuit}^! < l_{\text{vorher}}$



$$\vec{r}_s(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \frac{d}{dt} \vec{r}_s(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\exists \vec{v}_s \in \mathbb{R}^3$$

s. d.  $\forall t:$

$$\frac{d}{dt} \vec{r}_s(t) = \vec{v}_s$$

Invariante      Konstante

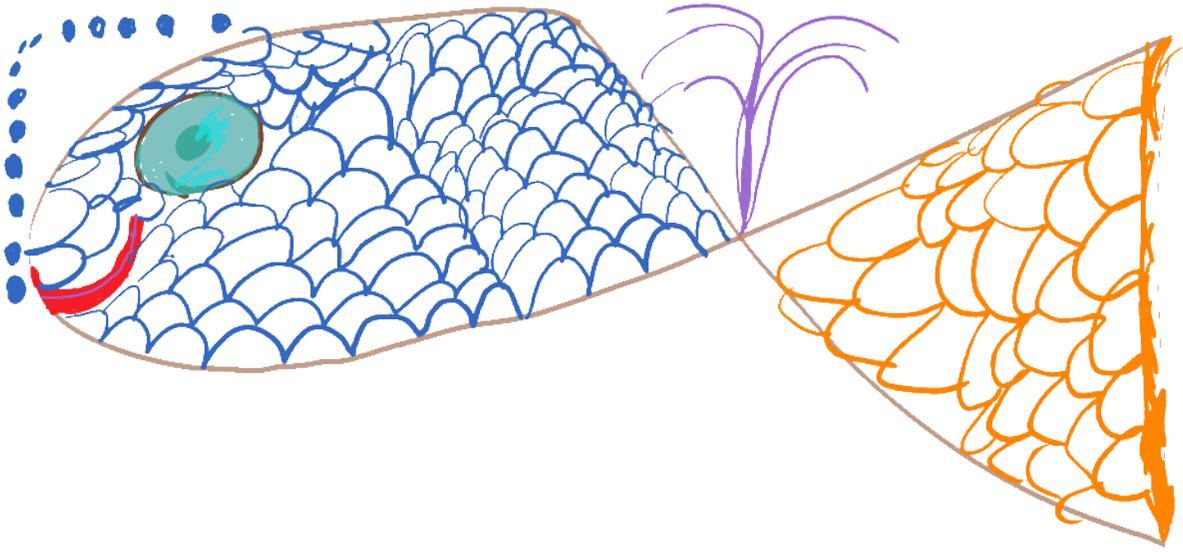
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r_i} = \frac{\vec{r}_i}{r} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{r}}{\partial r_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial r_n} \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \vec{r}_1 \\ \vdots \\ \vec{r}_n \end{bmatrix} = \frac{\vec{r}}{r} =: \hat{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial r_i} = \frac{r_i}{r} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dots \\ \frac{\partial r}{\partial r_3} \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \frac{r_i}{r} =: \hat{r}_i$$

Meine ältere Tochter hat mir bei der Vorbereitung über die Schulter geschaut. Dass ich jetzt ein Blogger bin, hat sie erst sehr beeindruckt... ..bis sie gesehen hat, was für lahme Sachen ich veröffentliche. Damit ich cooler werde, hat sie angeboten, mir einen Comic zu malen. Sie fand dass die Geschichte von den beiden Astronauten ein guter Aufhänger war. In die Liebeleien wollte sie sich aber nicht einmischen. Hier geht es um grundlegendere Bedürfnisse - Snacken auf dem Mond.



Die jüngere hat lieber einen Wal gemalt.

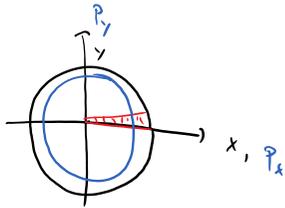
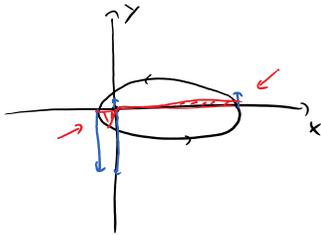
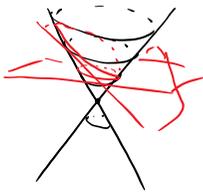


Themen:

- Warum fing es mit der Himmelsmechanik an?
- Ein wenig mehr zu Rutherford
- Kegelschnitte
- Hodographie?

- gute Daten
- relevant?
- sauber
  - frei Fall
  - ↳ • Luftwiderstand
  - Zeitmessung

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \phi}$$



Hodograph:

$$\vec{p}(t) = p \dot{\vec{r}}(t)$$

$$= p \frac{d}{dt} \left[ \frac{p}{1 + \epsilon \cos \phi(t)} \begin{pmatrix} \cos \phi(t) \\ \sin \phi(t) \end{pmatrix} \right]$$

$$= p \left[ p \frac{+\epsilon \sin \phi(t)}{(1 + \epsilon \cos \phi(t))^2} \dot{\phi}(t) \begin{pmatrix} \cos \phi(t) \\ \sin \phi(t) \end{pmatrix} \right.$$

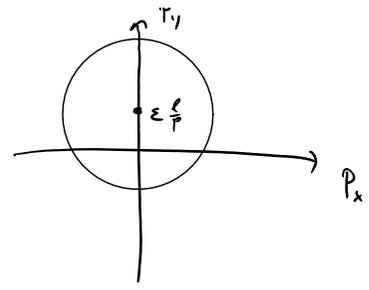
$$\left. + p \frac{1}{1 + \epsilon \cos \phi(t)} \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} \dot{\phi}(t) \right]$$

$$= p \frac{p}{p} \left[ \frac{\epsilon \sin}{p^2} \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} + \frac{1 + \epsilon \cos}{p^2} \begin{pmatrix} -\sin \\ \cos \end{pmatrix} \right]$$

$$= \frac{p}{p} \begin{pmatrix} \epsilon \sin \cos - \sin - \epsilon \sin \cos \\ \epsilon \sin^2 + \epsilon \cos^2 + \cos \end{pmatrix}$$

$$= \frac{p}{p} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ \epsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin \phi(t) \\ \cos \phi(t) \end{pmatrix} \right)$$

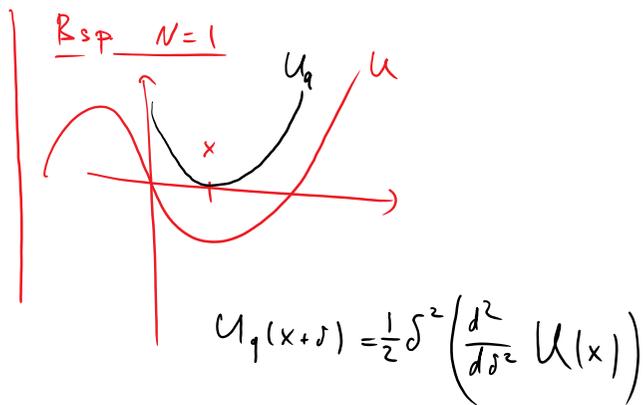




# Fünf ist Trumpf!

Themen:

- Demut, die erste: Bitte täglich beten am Altar der linearen Algebra
- Demut, die zweite: "Unsere Theorie kann daher versuchen, einen Wert für manche Frequenzen vorherzusagen"
- Ich frag Sie: Dispersion - klar wie Kloßbrühe?



$$M = M^T$$

$$M = \sum_k \lambda_k v_k(v_k, \cdot)$$

$$OMO^T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 > \lambda_i \quad i=2, \dots, N$$

$$M^m \rightarrow O M^m O^T = \begin{bmatrix} \lambda_1^m & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N^m \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow v_i v_i^T$$

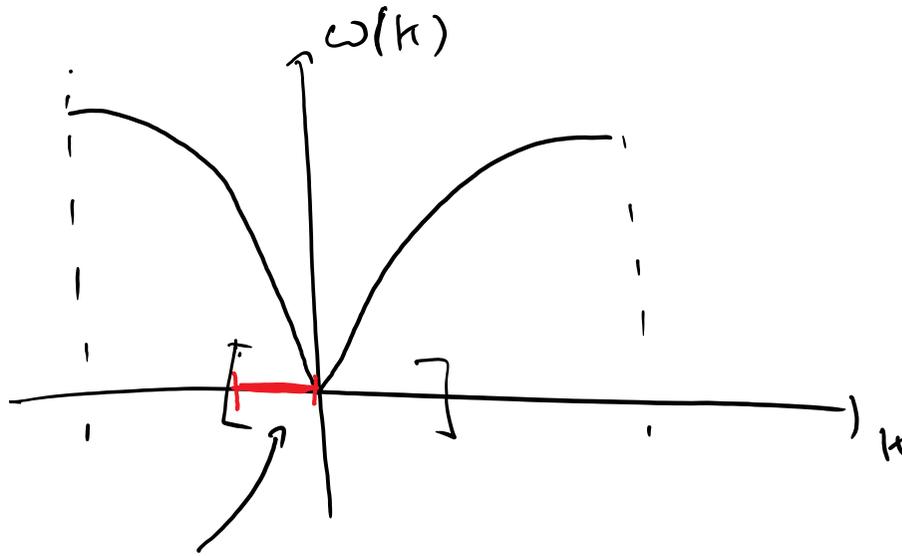
$$T \cdot T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = T^{-1} \quad \text{Yeah!}$$

- Wellen
- Klangfarben

Ⓘ

dispersions-  
frei



linear  $\omega(k) = | \sin(\dots k) |$

$$\delta(s, t) = \sum_{k \in \text{---}} c_k e^{i \frac{2\pi}{N} k s - i \omega_k t}$$

$\underbrace{\omega_k}_{\approx v_p \cdot k}$

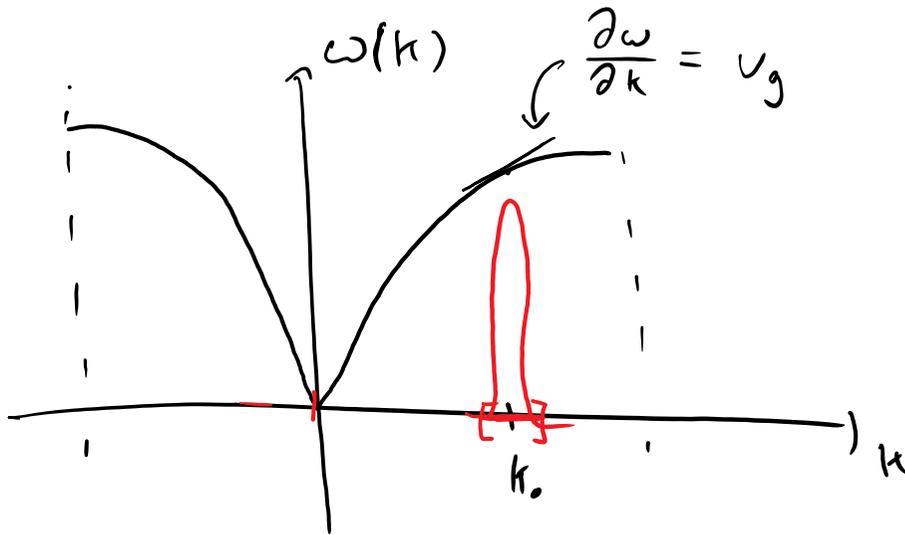
$$e^{i k \left( \frac{2\pi}{N} s - v_p t \right)}$$

↑  
dispersionsfrei

Ⓙ

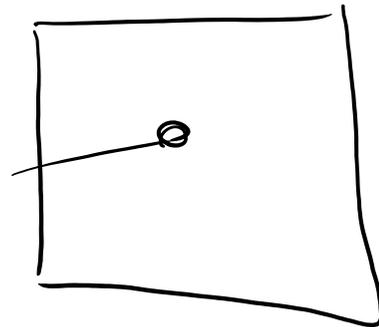
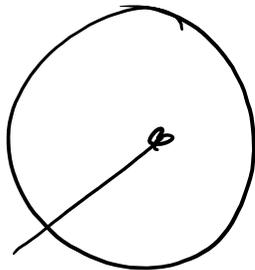
Im Allgemeinen: keine "Geschwindigkeit".

③ Dispersionsbereich



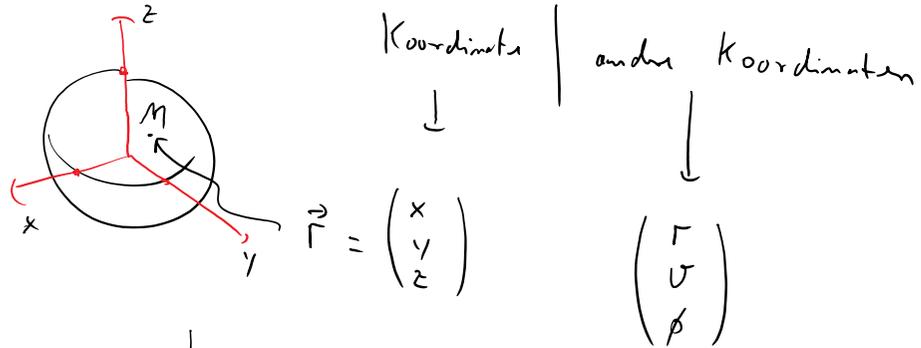
---

Can you hear the shape of a drum?

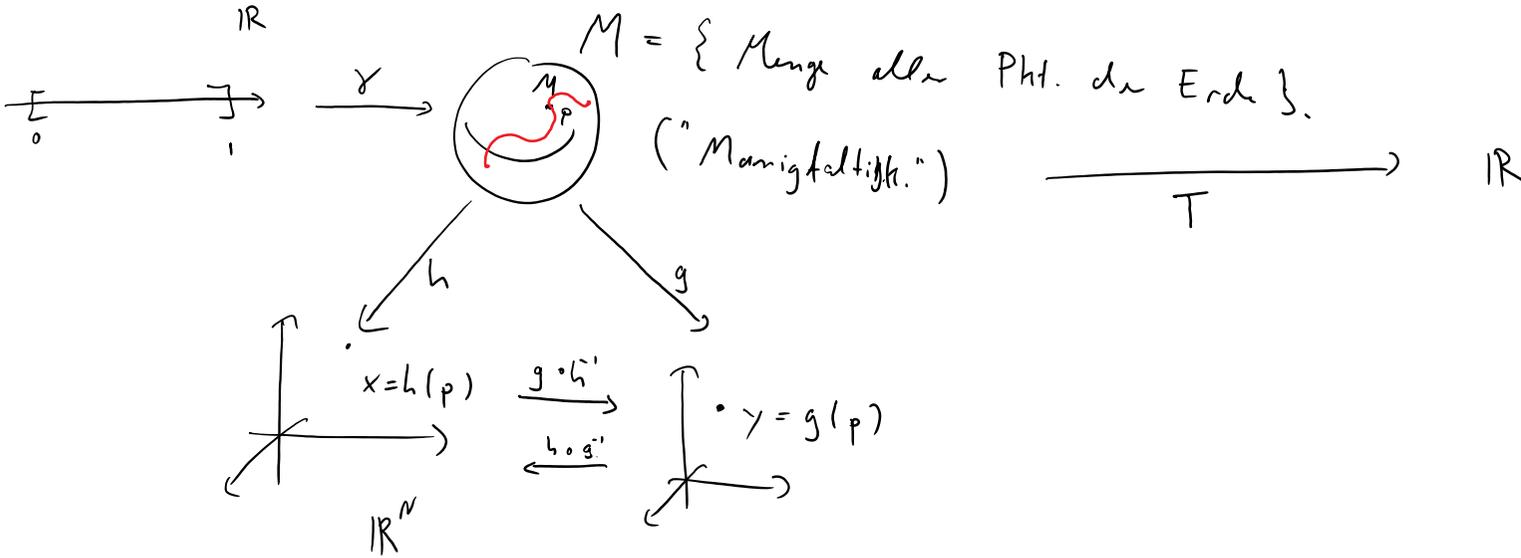


Themen:

- Euler-Lagrange (da gibt es bestimmt viel zu diskutieren)
- Nochmal zu Koordinaten / impliziten Konventionen in der Physik



$L(q, \dot{q}, t)$ $\frac{\partial L}{\partial q}$ $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$	$L(r, v, t)$ $= \frac{\partial L}{\partial r}(q(t))$ $= \frac{\partial L}{\partial v}(\dot{q}(t))$
--	--



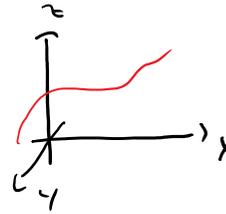
Bsp. Kart. Koord.

Kugelk.

Math.	Physik	Bed.
$p \in M$	$\vec{r}$	Punkt
$h: M \rightarrow \mathbb{R}^m$	$- / \vec{r}$	Koordinatenkt.
$g: M \rightarrow \mathbb{R}^n$	$\vec{r}'$	and. "
$g \circ h^{-1}$	$\vec{r} \quad \vec{r}'(\vec{r})$	Koordinatenwechsel
$h \circ g^{-1}$	$\vec{r}' \quad \vec{r}(\vec{r}')$	"
$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$	$\vec{r}, \vec{r}(t), \vec{r}(\cdot)$	Bahn
$\gamma_h := h \circ \gamma$	$\vec{r}$	Koordinatendarst. der Bahn
$\gamma_g := g \circ h$	$\vec{r}'$	
$T: M \rightarrow \mathbb{R}$	$T$	Skalar Fkt.
$T_h := T \circ h^{-1}$	$T, T(\vec{r})$	" " im Koordinat.
$T_g := T \circ g^{-1}$	$T, T(\vec{r}')$	" " " "
$\rightarrow T \circ \gamma$	$T, T(\vec{r}(t))$	" " entlang Bahn
"	:	
$T_g \circ \gamma_g$	:	
"	:	
$\rightarrow T \circ (g^{-1} \circ g) \circ \gamma$	:	

Zwangsbedingungen.

Reh.:  $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ h(x) \\ g(x) \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$

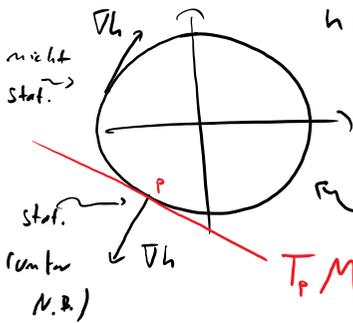


$f_1(x, y, z) = y - h(x)$

$f_2(x, y, z) = z - g(x)$

Stationäre Pkt. unter N.B.

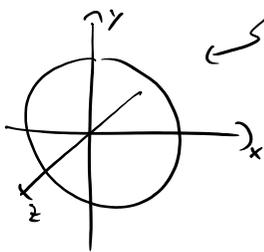
$h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$



$M = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 1 = 0 \}$

Tangentenraum

$\rightarrow (T_p M)^\perp =: N_p M$  Normalenraum.



$M = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f_1(x, y, z) = z$

$f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1 + kz \}$

(implizite) Annahme:  $\{ \vec{\nabla} f_i \}_i$  ist Basis

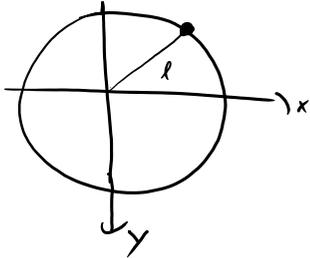
des Normalenraums.

Lagrange-Multipl.

$\vec{\nabla} h \in \text{Normalenraum} \Leftrightarrow \exists$  Entwicklungskoeff.  $\lambda_i$

s.d.  $\vec{\nabla} h = \sum \lambda_i \vec{\nabla} f_i$

$$\text{s. d. } \vec{\nabla} h = \sum_i \lambda_i \vec{\nabla} f_i.$$



$$A(x, y) = x^2 + y^2 - r^2$$

$$V_g(x, y) = mgy$$

Etwas realistisch als  $f(x, y) = 0$

ist:

$$\tilde{V}(x, y) = V_g(x, y) + \underbrace{\mu (f(x, y))^2}_{\text{"Energiestrafe"}}$$

für Verletzung

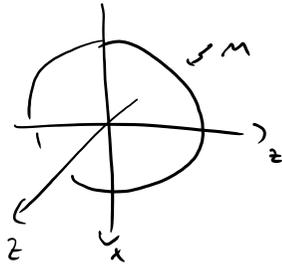
der z. B.

Konsistenzcheck: Löse BwG. für festes  $\mu$ .

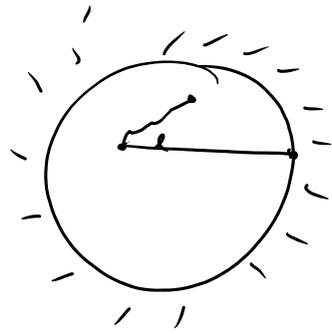
$$\leadsto \vec{\Gamma}^{(\mu)}(t)$$

$$\leadsto \vec{\Gamma}^{(00)}(t) := \lim_{\mu \rightarrow \infty} \vec{\Gamma}^{(\mu)}(t)$$

Hoffnung:  $\vec{\Gamma}^{(00)}(t) = \text{Lsg. des eing. Stationaritätsprinzips.}$



$$\tilde{V} = V + \sum_i \mu_i (h_i)^2$$



## Bemerkungen:

- Eing. SP:

Zwangskräfte tauchen nicht expl. auf.

Manchmal aber von Interesse.  $\rightarrow$  Übung.

- Alter tümliche Sprache:

"virtuelle Verrückung"  $\hat{=}$  Tangentenvektor zu  $M$ .

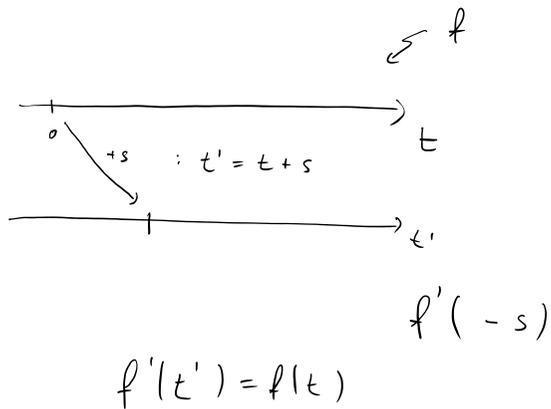
"virtuelle Arbeit"  $\hat{=}$  (Zwangskraft, T.V.)

d'Alembertsche Prinzip  $\hat{=}$   $(Z_k, T V) = 0$

dass virtuelle Arbeit

verschwindet

$\Leftrightarrow Z_k \in \text{Normalenraum}$



$$R : \vec{r} \mapsto R\vec{r}$$

$$R_2, R_1, r$$

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

Funktionsgesetz:  $R \cdot f = f(R \cdot)$

$$(R \cdot f)(\vec{r}) = f(R\vec{r})$$

$$(R_2(R_1 \cdot f))(\vec{r}) = R_2 f(R_1 \vec{r})$$

$$= f(\underline{R_1 R_2} \vec{r})$$

$$\neq (R_2 R_1) f(\vec{r}) = f(\underline{R_2 R_1} \vec{r})$$

$$(R \cdot f)(\vec{r}) = f(R^{-1} \vec{r})$$

$$(R_2(R_1 \cdot f))(\vec{r}) = R_2 f(R_1^{-1} \vec{r})$$

$$= f(\underline{R_1^{-1} R_2^{-1}} \vec{r})$$

$$((R_2 R_1) \cdot f)(\vec{r}) = f((R_2 R_1)^{-1} \vec{r})$$

$$= f(\underline{R_1^{-1} R_2^{-1}} \vec{r}) \quad \checkmark$$

$$\vec{r} : \underline{[0, T]} \rightarrow \mathbb{R}^N$$

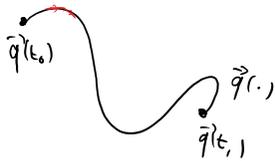
$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t-s)$$

$$\vec{r}'(0) = \vec{r}(-s)$$

N.B.:  $L = T - V$

$S'$  bei  $\vec{q}(t)$  stationär.

$\Rightarrow \vec{q}(t)$  kein Maximum von  $S'$ .



$$T = \sum_i m_i \dot{r}_i^2$$

$$\vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

$$\vec{v} \in \mathbb{R}^n$$

$$Q(\vec{x}, \vec{v}) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial v_i} \frac{d}{ds} \Big|_0 \Phi_i^{(s)}(\vec{x})$$

$$= \sum_i \frac{\partial L(\vec{x}, \vec{v})}{\partial v_i} \frac{d}{ds} \Big|_0 \Phi_i^{(s)}(\vec{x})$$

$$= \left( \vec{\nabla}_{\vec{v}} L, \frac{d}{ds} \vec{\Phi}^{(s)}(\vec{x}) \right)$$

Spezialfall:

$$L = T - V = \sum_i \frac{1}{2} m v_i^2 - V(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}_{\vec{v}} L = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial v_1} \\ \frac{\partial L}{\partial v_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m v_1 \\ m v_2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d \vec{\Phi}^{(s)}}{ds} \Big|_{s=0}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

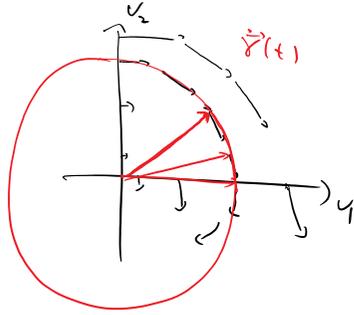
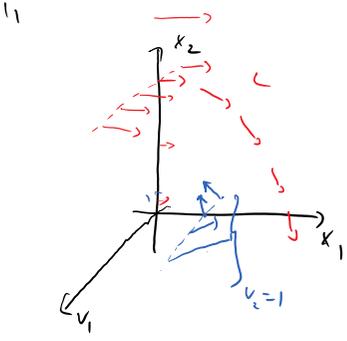
$$\vec{\Phi}^{(s)}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{ds} \Big|_0 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left( \vec{\nabla}_{\vec{v}} L, \frac{d \vec{\Phi}^{(s)}}{ds} \Big|_0 \right) = \left( \underbrace{\begin{pmatrix} m v_1 \\ m v_2 \end{pmatrix}}_{\vec{p}}, \underbrace{\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}} \right) = \text{Impuls in Richtung des V.F. der Symmetrie.}$$

$\left( \underbrace{m v_2}_{\vec{p}} \right), \left( x_1 \right)$  V.F. der Symmetrie.  
V.F. der Rot.



# 9. Zu Hamilton

Thursday, January 14, 2021 11:15 AM

Schuldschein an Herrn Albert:

$\dot{q}$

$L = T - U$

$= \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - U(q)$

$aDL$

$\left( \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m \cdot \dot{q} \\ \frac{\partial L}{\partial q} \end{array} \right)$

$\nabla H$