Theoretische Physik II (Lehramt, Geophysik, Wahlfach)

David Gross

Präsenzübung **Keine Punkte, keine Abgabe**

Hintergrund: Die Mathematik der klassischen Mechanik ist die Analysis. Für die Quantenmechanik hat der Schöpfer in die Werkzeugkiste der linearen Algebra gegriffen. Warum? So genau weiß man das nicht. In jedem Fall müssen Sie etwas LA wiederholen. Das ist ganz gut, eigentlich, denn LA ist das vielleicht einfachste Teilgebiet der Mathematik.

1 Wie in der Schule: Vektoren in der Ebene

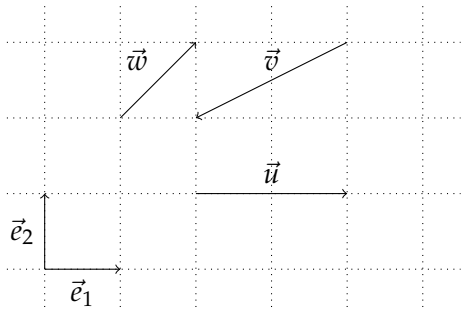
Die in der unten stehenden Abbildung gezeigten Pfeile repräsentieren Vektoren.

a) Skizzieren Sie folgende Linearkombinationen: $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}-\vec{w}$, $\frac{1}{2}\vec{u}$, $2\vec{w}+3(\vec{u}+\vec{v}+\frac{1}{3}\vec{w})$

b) Bestimmen Sie die Komponenten von $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ bezüglich der Basis $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$.

c) Bestimmen Sie die Komponenten $\mathbf{e}_2$ von $\vec{e}_2$ bezüglich der Basis $(\vec{e}_1,\vec{w})$.

d) Warum ist $(\vec{e}_1,\vec{u})$ keine Basis für alle Verschiebungen in der Ebene?



2 Orthonormalbasen

Wie betrachten den $\mathbb{R}^n$ mit *Skalarprodukt*

$$\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Eine Menge von n Vektoren $\{\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_n\}$ heißt *Orthonormalbasis* (ONB) wenn gilt:

$$\langle\vec{b}_i,\vec{b}_j\rangle = \delta_{ij}.$$

a) Geben Sie zwei Orthonormalbasen für den $\mathbb{R}^2$ an.

b) Sei $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$ ein Vektor. Man kann ihn bzgl. der ONB entwickeln:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} c_i\vec{b}_i, \qquad c_i\in\mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass die Entwicklungskoeffizienten durch Skalarprodukte bestimmt werden können:

$$c_i = \langle\vec{b}_i,\vec{x}\rangle.$$

Hintergrund: Im Allgemeinen ist es recht aufwendig, einen Vektor in einer Basis zu entwickeln. Aber für ONBs macht die Formel es einem leicht!

c) Die Länge eines Vektors ist in der LA durch den Ausdruck

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$$

definiert. Zeigen Sie die Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} c_i \vec{b}_i \qquad \Rightarrow \qquad \|\vec{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 .$$

Was hat das mit Pythagoras zu tun?

d) Betrachten Sie die zweidimensionale Ebene von Vektoren $\vec{x}\mathbb{R}^3$, deren Komponenten sich zu Null addieren: $\sum_{i=1}^{3} x_i = 0$. Skizzieren Sie den Raum (so gut es halt geht...). Geben Sie eine ONB für diesen Unterraum an.

3 Unser Freund, die Eigenwertgleichung!

Sie glauben, das Leben in der Quantenphysik bestünde daraus, tagelang über das Messproblem nachzugrübeln? Schön wär's. Tatsächlich verbringt man die meiste Zeit damit, Eigenwertgleichungen zu lösen...

Erinnern Sie sich: Sei M eine $n \times n$-Matrix. Ein *Eigenvektor* von M ist ein von Null verschiedener Vektor $\vec{x}$, so dass das Matrix-Vektor-Produkt den Vektor lediglich reskaliert: $M\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Der Skalierungsfaktor λ ist der *Eigenwert* zu $\vec{x}$.

a) Finden Sie jeweils linear unabhängige Eigenvektoren und die dazugehörigen Eigenwerte für

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Scharfes Hinschauen reicht. Man muss nicht viel rechnen.

b) Was ist die geometrische Bedeutung folgender Matrix? Was sind ihre Eigenvektoren und Eigenwerte?

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$