12. Vorlesung | TP1 23.11.18

bisher:

Newton. Mechanik $\longleftrightarrow$ Stationaritätsprinzip

z.B für Teilchen (Masse m) im kons. Kraftfeld $\vec{F} = -\text{grad}\, U$

Newton: Bahn $\vec{r}(t)$ ist Lösung der BWGl.:

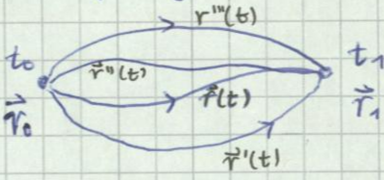
$$m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t))$$

Stationaritätsprinzip:

Bahn $\vec{r}(t)$ ist stationäre Funktion des Wirkungsfunktionals

$$S[\vec{r}] = \int_{t_0}^{t_1} L(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t))\, dt$$

mit Lagrange-Fkt. $L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \underbrace{\frac{m}{2}|\dot{\vec{r}}|^2}_{T} - \underbrace{U(\vec{r})}_{V}$



$\vec{r}(t)$ minimiert $S[\vec{r}]$!

Warum Newton $\longleftrightarrow$ S.P ?

$\vec{r}(t)$ stationär (ELG)

$\longleftrightarrow$ $\vec{r}(t)$ genügt Euler-Lagrange Gl.en

$$0 = \frac{\partial L}{\partial r_i}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t))$$

$\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$ (kurz $\frac{\partial L}{\partial r_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = 0$)

$$0 \overset{!}{=} -\text{grad}\, U(\vec{r}(t)) - m\ddot{\vec{r}}(t)$$

d.h. $\vec{r}(t)$ genügt Newt. Bew. Gl.

beachte: Wirkung einer Bahn ist unabhängig von Wahl der Koordinaten!

$$\vec{r}(t) \underset{\Phi}{\overset{\Phi^{-1}}{\rightleftarrows}} \vec{q}(t) = \Phi^{-1}(\vec{r}(t))$$

$$\underbrace{S[\vec{r}]}_{\int_{t_0}^{t_1} L(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t))\, dt} \overset{!!}{=} S_q[\vec{q}] = \int_{t_0}^{t_1} L_q(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t))\, dt$$

d.h. $\vec{r}(t)$ stationär $\Leftrightarrow$ $\vec{q}(t)$ stationär

$\rightsquigarrow$ ELG gelten in allen Koordinaten!

|| Rezept: Lagrange Mechanik

(0) Wähle geeignete Koordinaten

$$\vec{q} \equiv q = (q_1, q_2, \dots, q_n) \quad \text{\# Freiheitsgrade}$$

(1) bestimme $L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q)$

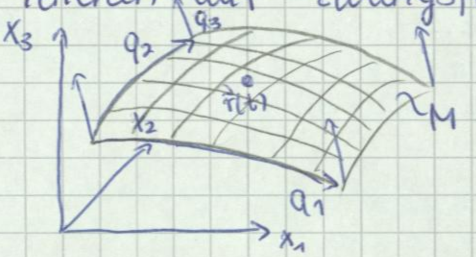
(2) Löse ELG $\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$

$\rightsquigarrow$ Bahn $q(t)$!

Lagrange-Mechanik besonders vorteilhaft bei

Bewegung unter Zwangsbedingungen

Teilchen auf Zwangsfläche: unter kons. Kraft $\vec{F} = -\operatorname{grad} U$



- Zwangskraft $\vec{F}_Z(t)$ hält per. def. Teilchen auf Zwangsebene M
- $\vec{F}_Z \perp M$

Welcher Bahn $\vec{r}(t)$ folgt das Teilchen?

Newton: $m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t)) + \vec{F}_Z(t)$

Lagrange:

(0) Wähle geeignete Koordinaten $q = (q_1, q_2, q_3)$ derart, dass für alle $q \in M$ $q_3 = 0$:

$$q = (q_1, q_2, q_3) \in M \Leftrightarrow q_3 = 0$$

(1) Annahme:

Lagr.-Funktion $L(q, \dot{q})$ des vollst. Systems (inkl. Zwangskraft!) bekannt!

(2) $q(t) = (q_1(t), q_2(t), q_3(t))$ als Lösungen der ELGen!

Wichtig: wenn alles stimmt muss $q(t) \in M$ für alle t!

d.h. $q_3(t) \equiv 0$!

12. Vorlesung Teil. 2	28.11.18 TP 1

Konsequenzen:

in (1): $L_q(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$

brauch nur für $q_3 \equiv 0$ und $\dot{q}_3 = 0$ bestimmt werden

in (2): • setze $q_3(t) = 0$!

→ nur Lösungen der ELG für q_1, q_2!

Rezept:

Lagrange-Mechanik unter Zwangsbedingungen

(0) wähle sog. unabhängige Koordinaten auf Zwangsfl. M $q = (q_1, q_2)$

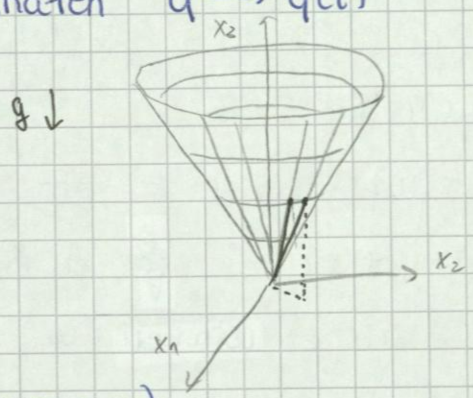
allg: • n Freiheitsgrade ohne Z-Bed.

• k Zwangsbedingungen

→ $m = n - k$ unabh. Koordinaten:

(1) bestimme $L_q(q, \dot{q})$ anhand $T(q, \dot{q})$ und $V(q)$

(2) Löse ELG in unabh. Koordinaten $q \rightarrow q(t)$



1. Beispiel

Teilchen auf Kegelmantel unter Schwerkraft

(0) unabhängige Koordinaten:

$q = (r, \varphi)$

$$q \rightarrow \vec{r} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ ur \end{pmatrix} \quad \left(\frac{z}{r} = u = \cot\alpha\right)$$

(1) $$\dot{\vec{r}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \cdot \dot{r} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\dot{\varphi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ u \end{pmatrix} \dot{r} + \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} r\dot{\varphi}$$

$$\rightsquigarrow |\dot{\vec{r}}|^2 = (1+u^2)\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$$

$$\rightarrow T(r, \cancel{\varphi}, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2}|\dot{\vec{r}}|^2 = \frac{m}{2}\left((1+u^2)\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right)$$

$$V(r, \cancel{\varphi}) = m \cdot g \cdot u \cdot r$$

$$\Rightarrow L(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2}\left((1+u^2)\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - m \cdot g u r$$

(2') ELG:

(i) φ: • $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$

• $\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = m r^2 \dot\varphi$

$\rightarrow 0 = -\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = -\frac{d}{dt}(m r^2 \dot\varphi) = 0$

d.h. $l_z := m r^2 \dot\varphi$ ist Erhaltungsgröße

(ii) r: $\frac{\partial L}{\partial r} = m r \dot\varphi^2 - m g u$

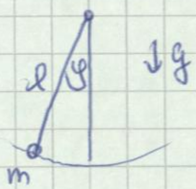
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot r} = \frac{d}{dt}\left(m(1+u^2)\dot r\right) = m(1+u^2)\ddot r$$

ELG: $m(1+u^2)\ddot r = m r \dot\varphi^2 - m g u = \frac{l_z^2}{m r^3} - m g u$

$$m(1+u^2)\ddot r = -\frac{\partial}{\partial r}\underbrace{\left(\frac{l_z^2}{2 m r^2} + m g u r\right)}_{U_{eff}} \quad \rightsquigarrow r(t)$$

2. Beispiel: ebene Pendel

$$U(\vec r) = m g x_3 + \text{konst}$$



(0): $q = \varphi$!

(1): $T(\varphi, \dot\varphi) = \frac{m}{2}(l\dot\varphi)^2 = \frac{m}{2} l^2 \dot\varphi^2$

$$V(\varphi) = -m g l \cos\varphi$$

$$L(\varphi, \dot\varphi) = \frac{m}{2} l^2 \dot\varphi^2 + m g l \cos\varphi$$

(2) $-m g l \sin\varphi = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = m l^2 \ddot\varphi$

$\rightsquigarrow \ddot\varphi(t) = -\frac{g}{l}\sin(\varphi(t))$

für kleine Auslenkung $\varphi \ll 1$: $\sin\varphi = \varphi$

$\ddot\varphi = -\omega^2 \varphi$, $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

$\rightsquigarrow$ harm. Schwingung mit

Offene Fragen:

1) Bestimmung der Zwangskräfte

2) explizite Behandlung des Zwangsmechanismus (physik. realisier.)

$L(q, \dot q) \rightarrow q(t)$! $\quad q(t) \xrightarrow{\Phi} \vec r(t) = \Phi(q)$

$\rightsquigarrow m\ddot{\vec r}(t) = \vec F(\vec r(t)) + \vec F_z(t) \Rightarrow \vec F_z(t) = m\ddot{\vec r}(t) - \vec F(\vec r(t))$

13. Vorlesung | TP 1

FHG: $\cdot\ \vec{S} \in \mathbb{R}^3$ Schwerpunkt
$\cdot$ Orientierung $\hat{=}\ \mathbb{R} \in SO(3)$ $\Big\}\ m = 6$ FHG

$\Rightarrow\ \vec{r}_j(t) = R(t)\,\vec{r}_j(0) + \vec{S}(t)$, mit $\vec{s}(0) = \vec{0}$

↳ Kräftefrei $\rightsquigarrow V = 0$
Ab Jetzt

Konzept ①: Winkelgeschwindigkeit

Sei $\vec{r}(t) = R(t)\,\vec{r}(0)$. Dann gibt es zu jeder Zeit eine (Momentane vektorielle) Winkelgeschw. $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$, s.d.

$$\frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \dot{R}(t)\,R(t)^{-1}\,\vec{r}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t)$$

Beweis: Erinnerung: 3×3 Matrix M ist Drehmatrix wenn
- $\det R = 1$
- $(R\vec{a}, R\vec{b}) = (\vec{a}, \vec{b})\quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$

$\quad \overset{\|}{(\underbrace{R^T R}_{=\mathbb{1}}\,\vec{a}, \vec{b})}$

Nun: $R(t)$ mit $R(0) = \mathbb{1}$

Taylor: $R(t) = \mathbb{1} + tM + \mathcal{O}(t^2) \in SO(3)\quad \forall t.$

$\Leftrightarrow\ R^T(t)\,R(t) = \mathbb{1} + tM + tM^T + \mathcal{O}(t^2) \overset{!}{=} \mathbb{1}$

$\Leftrightarrow\ M$ anti-Symmetrisch: $M = -M^T$

Menge der anti-symmetrischen 3×3 Matrizen, ist die Menge der Erzeugenden der $SO(3)$, Lie-Algebra oder $\mathbb{1} + M$ "für kleine t" ist infinitesimale Drehung

② Sei wieder $R(0) = 0$, $R(t) = \mathbb{1} + t\underbrace{M}_{=-M^T} + \dots$

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\vec{r}(t) = \frac{d}{dt}\Big|_0 R(t)\,\vec{r}(0) = M\,\vec{r}(0)$$

Beh.: Für jede anti-Symm. Matrix M gibt es ein $\vec{\omega}$ s.d. $M\vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

Bew.: $\forall \vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$ defin. $\vec{r} \mapsto \vec{\omega} \times \vec{r}$ linear Abb.

Matrix-Elemente davon sind:

$$(\vec{e}_i, \vec{\omega} \times \vec{e}_j) = -(\vec{e}_j, \vec{\omega} \times \vec{e}_i) \quad \text{anti-Symm.}$$

Matrizen Aber: $M = -M^T \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \to 3$ dim. Raum

③ $$\frac{d}{dt} R(t)\, \vec{r}(0) = \frac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0} R(t+\tau)\, \vec{r}(0)$$

$$= \Big[\frac{d}{d\tau}\Big|_0 \underbrace{\left(R(t+\tau)\, R^{-1}(t)\right)}_{=:\, \tilde{R}(\tau),\ \tilde{R}(0) = R(t) R^{-1}(t) = \mathbb{1}}\Big] R(t)\, \vec{r}(0)$$

$$= \vec{\omega} \times (R(t)\, \vec{r}(0)) = \vec{\omega} \times \vec{r}(t).$$

$$= \dot{R}(t)\, R^{-1}(t)\, \vec{r}(t)$$

Bsp.

$$R(t) = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & \\ \sin\omega t & \cos\omega t & \\ & & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \frac{d}{dt}\Big|_0 R(t) = \underbrace{\omega \begin{pmatrix} 0 & -1 & \\ 1 & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}}_{M}$$

$$M\vec{r} = \underbrace{(\omega\, \vec{e}_z)}_{\vec{\omega}} \times \vec{r}$$

Konzept II: Trägheitstensor

Zweck: Setze Drehimpuls $\vec{L}$ (erhalten) mit Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}(t)$ in Beziehung.

$$\vec{L} = \sum_j m_j\, \vec{r}_j \times \dot{\vec{r}}_j \underset{I}{=} \sum_j m_j\, \vec{r}_j \times (\vec{\omega}(t) \times \vec{r}_j)$$

$$\underset{\text{Bac-cab}}{=} \sum_j m_j \left[\vec{\omega}(t) \cdot \|\vec{r}_j\|^2 - \vec{r}_j\, (\vec{r}_j, \vec{\omega}(t))\right]$$

$\rightsquigarrow$ L ist lin. Fkt. von $\vec{\omega}$. Matrixdarst. davon ist Trägheitstensor I $\rightsquigarrow$ Elemente

$$L_a = \sum_{b=1}^{3} I_{ab}\, \omega_b \Rightarrow L_a = \sum_b \underbrace{\Big[\sum_j m_j\, \delta_{ab} \|r_j\|^2 - (\vec{r}_j)_a (\vec{r}_j)_b\Big]}_{I_{ab}} \omega_b$$

Anders: $$I = \sum_j m_j \begin{bmatrix} (y_j^2 + z_j^2) & -x_j y_j & -x_j z_j \\ -x_j y_j & (x_j^2 + z_j^2) & -y_j z_j \\ -x_j z_j & -y_j z_j & (x_j^2 + y_j^2) \end{bmatrix}$$

$a \in (1, 2, 3)$

$\in (x, y, z)$

$$\to \int d^3\vec{r}\, \rho(\vec{r}) \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy \\ \dots & \end{bmatrix}$$

Kont.-Limes

14 Vorlesung

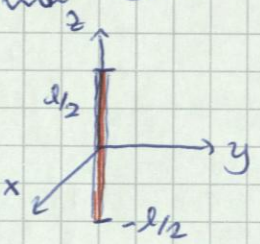
TP 1
06.12.18

Wiederholung: (I) $\dot{\vec{r}}(t) = \dot{R} R^T \vec{r}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t)$

(II) $I = \sum_j m_j \begin{pmatrix} y_j^2+z_j^2 & -x_j y_j & -x_j z_j \\ -x_j y_j & x_j^2+z_j^2 & -y_j z_j \\ -x_j z_j & -y_j z_j & x_j^2+y_j^2 \end{pmatrix}$

$$\to \int d^3r\, \rho(\vec{r}) \begin{bmatrix} y^2+z^2 & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \end{bmatrix} = \sum_j m_j \left[\mathbb{1} \|\vec{r}_j\|^2 - \vec{r}_j \vec{r}_j^{\,T} \right]$$

Bsp: Stab



$$\leadsto I = \begin{pmatrix} I_1 & & \\ & I_2 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \qquad I_1 = \frac{M}{l} \int_{-l/2}^{l/2} dz\, z^2 = \ldots = \frac{M}{12} l^2$$

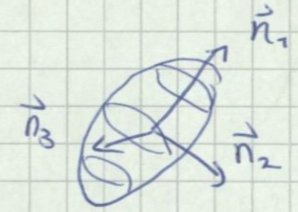
Bem: $\exists\, O \in SO(3)$, s.d. $O I O^T = \begin{bmatrix} I_1 & & \\ & I_2 & \\ & & I_3 \end{bmatrix}$, mit $I_i \geq 0$

Bew: Sei $\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow (\vec{x}, I\vec{x})$

$$= \sum_j m_j \big(\underbrace{\|\vec{x}\|^2 \|\vec{r}_j\|^2 - (\vec{r}_j, \vec{x})^2}_{C.S\ \geq 0} \big) \geq 0 \quad ∎$$

$\leadsto$ • Eigenvektoren heißen HTA.

• Eigenwerte sind HTMomente



Konvention, bei $t=0$ sind HTA = koord.-Achse

$\vec{h}_a(0) = \vec{e}_a$, $I(t)\, \vec{h}_a(t)$, $a = 1, \ldots, 3$

Formelsammlung

$I(t) = R(t) I(0) R(t)^T$ $\qquad \vec{L} = I \vec{\omega} \qquad T_{kin} = (\vec{\omega}, I\vec{\omega})$

$\vec{L}' = I(0) \vec{\omega}'$

(III) Rotierendes Bezugssystem

Häufig nützlich: Nehme HTA $\vec{h}_1(t), \vec{h}_2(t), \vec{h}_3(t)$ als Bezugssystem:

Dazu: $\vec{h}_a(t) = R(t) \vec{h}_a(0) = R(t) \vec{e}_a$

$\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \quad \vec{x} = \sum_a x_a \vec{e}_a = \sum_a x_a' \vec{h}_a, \quad \vec{x}' = R^T \vec{x}$

Insbesondere gebraucht: $\vec{\omega}' = R^T \vec{\omega}$

$$\vec{L}' = R^T \vec{L}$$

① $\vec{L} = I\vec{\omega} \iff R\vec{L}' = I' R\vec{\omega}$, $\vec{L}' = \underbrace{R^T I R}_{I(0)} \vec{\omega}'$

→ F. Sammlung $\vec{L}' = I(0)\vec{\omega}'$

② $R^T \dot{R} \vec{r} = R^T(\dot{R} R^T) R \vec{r} = R^T(\vec{\omega} \times (R\vec{r}))$

$$= (R^T \vec{\omega}) \times \vec{r} = \vec{\omega}' \times \vec{r}$$

→ F. Sammlung $R^T \dot{R} \vec{r} = \vec{\omega}' \times \vec{r}$

Erntezeit: Euler-Gleichung

$$0 = \frac{d}{dt}\vec{L} = \frac{d}{dt}(R\vec{L}') = \frac{d}{dt}(R I(0)\vec{\omega}')$$

$$= \dot{R} I(0) \vec{\omega}' + R I(0) \dot{\vec{\omega}}' = R(R^T \dot{R} I(0) \vec{\omega}' + I(0)\dot{\vec{\omega}}')$$

$$= R\underbrace{(\vec{\omega}' \times (I(0)\vec{\omega}') + I(0)\dot{\vec{\omega}}')}_{=0}$$

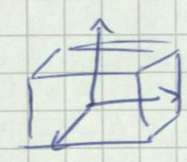
Komponenten: $I_1 \dot{\omega}_1' + \omega_2' I_3 \omega_3' - \omega_3' I_2 \omega_2' = 0$

$$\iff \left.\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1' &= \omega_2' \omega_3' (I_2 - I_3) \\ I_2 \dot{\omega}_2' &= \omega_1' \omega_3' (I_3 - I_1) \\ I_3 \dot{\omega}_3' &= \omega_1' \omega_2' (I_1 - I_2) \end{aligned}\right\} (E)$$

Lösungen:

① Drehung um HTA.

$\vec{\omega}'(t) = \begin{pmatrix} \Omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ = const. löst (E)



Stabilitätsanalyse

$\vec{\omega}'(t) = \begin{pmatrix} \Omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \vec{\varepsilon}'(t)$ ⇝ $\dot{\varepsilon}_1' = 0$, $I_2 \dot{\varepsilon}_2' \overset{*}{=} \Omega \cdot \varepsilon_3' (I_3 - I_1)$

$I_3 \dot{\varepsilon}_3' = \Omega \varepsilon_2' (I_1 - I_2)$

$* \iff \varepsilon_3' = \dot{\varepsilon}_2' \frac{I_2}{I_3 - I_1} \frac{1}{\Omega}$

$$\Rightarrow \ddot{\varepsilon}_2' = \varepsilon_2' \underbrace{\Omega^2 \frac{I_3}{I_2} (I_1 - I_2)(I_3 - I_1)}_{A}$$

$$\Rightarrow \ddot{\varepsilon}_2' = \varepsilon_2' A$$

- Stabil wenn $A < 0$
- EXP unstabil wenn $A > 0 \Leftarrow I_2 > I_1 > I_3$, $I_3 > I_1 > I_2$

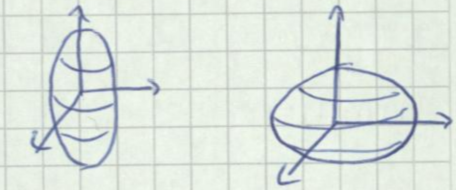
15. Vorlesung | TP 1 07.12.18

Wiederh.

$$(E)\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1' = \omega_2' \omega_3' (I_2 - I_3) \\ I_2 \dot{\omega}_2' = \omega_1' \omega_3' (I_3 - I_1) \\ I_3 \dot{\omega}_3' = \omega_1' \omega_2' (I_1 - I_2) \end{cases}$$

Symmetrische Kreisel

Nehme an: $I = \begin{pmatrix} I_1 & & \\ & \overset{=}{I_2} & \\ & & \overset{\neq}{I_3} \end{pmatrix}$ Bsp.

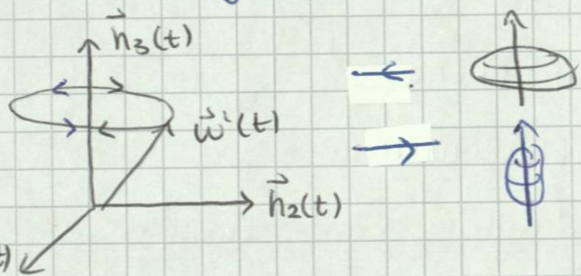


$I_1 = I_2 \underset{(E_3)}{\Rightarrow} \omega_3'$ ist EHG!

$\Rightarrow$ Ersten beiden Euler-Gl wieder linear:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\omega}_1' &= \omega_2' \left(\omega_3' \frac{I_1 - I_3}{I_1} \right) =: \omega_2' \Omega \\ \dot{\omega}_2' &= \omega_1' \left(\omega_3' \frac{I_3 - I_1}{I_1} \right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{\omega}_1' &= \Omega \omega_2' \\ \dot{\omega}_2' &= -\Omega \omega_1' \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_1'(t) = A \sin(\Omega t + \phi) \\ \omega_2'(t) = A \cos(\Omega t + \phi) \end{cases}$$



$\rightarrow$ Momentane Drehachse präzid. um 3. HTA im körperfesten Bezugssystem.

Wollen: $\vec{\omega}(t) = R(t) \underbrace{\vec{\omega}'(t)}_{\checkmark}$ (Direkter Beweis schwierig)

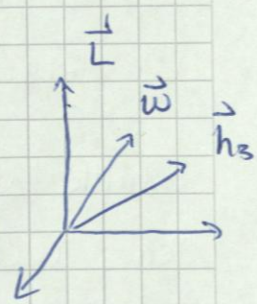
Hier: indirekte geom. Lsg:

Ansatz: Gehe über $\vec{L}$.

$$\vec{L}' = I(0)\, \vec{\omega}' = I_1 \vec{\omega}' + (I_3 - I_1)\, \omega_3' \vec{e}_3$$

$$\Rightarrow \vec{L} = R \vec{L}' = I_1 \vec{\omega} + (I_3 - I_1)\, \omega_3' \vec{h}_3$$

$\Rightarrow \vec{L}, \vec{\omega}, \vec{h}_3$ liegen in einer Ebene!



Desweiteren:

- Die Längen aller Vektoren sind konst.
- Ihre inneren Produkte sind auch konstant!

$$(\vec{\omega}, \vec{L}) = (\vec{\omega}, I \vec{\omega}) = T_{kin}, \quad (\vec{h}_3, \vec{L}) = (R \vec{e}_3, \vec{L}) = (\vec{e}_3, \overbrace{R^T \vec{L}}^{L'}) = I_3 \omega_3'$$

$$\frac{d}{dt}\vec{h}_3(t) \doteq \vec{\omega}\times\vec{h}_3(t)$$

Hamilton - Mechanik

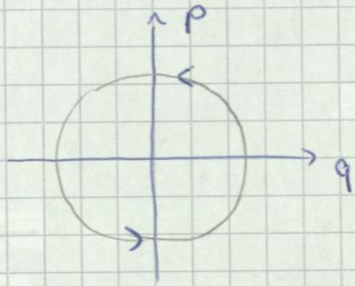
	Ordnung der Zeitabl.	Spezialisiert durch	BWG	Bahnen
Newton	2	$\vec{F}(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)$	$m_j\ddot{\vec{r}}_j = \vec{F}_j$	$\vec{r}(t)\in\mathbb{R}^N$
Lagrange	2	$L(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)$	$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} = 0$	$\vec{q}(t)\in\mathbb{R}^N$
Hamilton	1	$H(\vec{q},\vec{p},t)$	$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$ $\quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$	$(\vec{q}(t),\vec{p}(t))\in\mathbb{R}^{2N}$

Bsp.: $N=1$, $H(q,p) = p^2+q^2$

Bedingung an $(q(t),p(t))$: $\cdot\ \dot{q}(t) = 2p(t)$

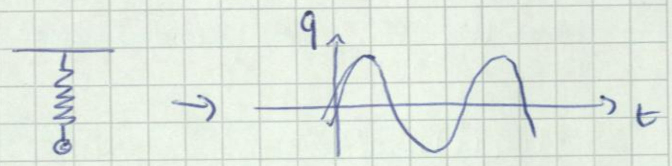
$\cdot\ \dot{p}(t) = -2q(t)$

Lsg.:



q-p-Ebene

= Phasenraum



Lagrange ⟶ Hamilton

Gegeben $L(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)$

① Def. $\tilde{H}(\vec{q},\dot{\vec{q}}) = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L(\vec{q},\dot{\vec{q}})$

② $p_j(\vec{q},\dot{\vec{q}}) := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(\vec{q},\dot{\vec{q}})$ verallg. Impuls

Nehme an, kann auflösen $\dot{\vec{q}}(\vec{q},\vec{p})$ $(*)$

(Wenn nicht: kann keine Hamilt.-Fkt. zu L finden)

③ Setze $H(\vec{q},\vec{p}) = \sum_j \dot{q}_j(\vec{q},\vec{p})p_j - L(\vec{q},\dot{\vec{q}}(\vec{q},\vec{p}))$

Schritte ① - ③ : $L(\vec{q},\vec{p}) \longmapsto H(\vec{q},\vec{p})$ Legendre - Trafo.

Beh.: Wenn H durch Legendre - Trafo aus L hervorgeht dann:

$\vec{q}(t)$ löst ELG $\Leftrightarrow$ $(\vec{q}(t),\vec{p}(t))$ löst Hamilton-Gl

mit $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$

16. Vorlesung

TP1

13.12.18

Wiederholung

(H) $\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$, $\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$

Lagrange $\rightarrow$ Hamilton

Gegeben: $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$

① $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$

② Wenn möglich, löse nach $\dot{q}$ auf: $\dot{q}_j(\vec{q}, \vec{p})$

③ $H(\vec{q}, \vec{p}) = \sum_j p_j \dot{q}_j(\vec{q}, \vec{p}) - L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}(q, \vec{p}))$

Behauptung: Äquivalent

① $\vec{q}(\cdot)$ löst die ELG für L

② $(\vec{q}(\cdot), \vec{p}(\cdot))$ löst Hamilton-Gl. für (H)

Für Lagrange-Fkt in "natürlicher Form" $L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \underbrace{T(\dot{\vec{r}})}_{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2} - V(\vec{r})$

① $p_j = m_j \dot{r}_j = p_j(\dot{r}_j)$

② $\Rightarrow \dot{r}_j(p_j) = \frac{p_j}{m_j}$

③ $H(\vec{r}, \vec{p}) = \sum_j p_j \frac{p_j}{m_j} - \sum_j \frac{1}{2} m_j \frac{p_j^2}{m_j^2} + V(\vec{r})$

$= \sum \frac{p_j^2}{2m_j} + V(\vec{r}) = \text{Gesamtenergie}(\vec{r}, \vec{p})$

Beweis: für $N=1$ ($N>1$ im Skript)

"ELG $\Rightarrow$ H" $\quad \dot{q} \overset{!}{=} \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q} + p\frac{\partial \dot{q}}{\partial p} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}}_{p} \frac{\partial \dot{q}}{\partial p} = \dot{q}$

$$\dot{p} \overset{!}{=} -\frac{\partial H}{\partial q} = -p\frac{\partial \dot{q}}{\partial q} + \frac{\partial L}{\partial q} + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}}_{p} \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt}\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}}_{p} = \dot{p}$$

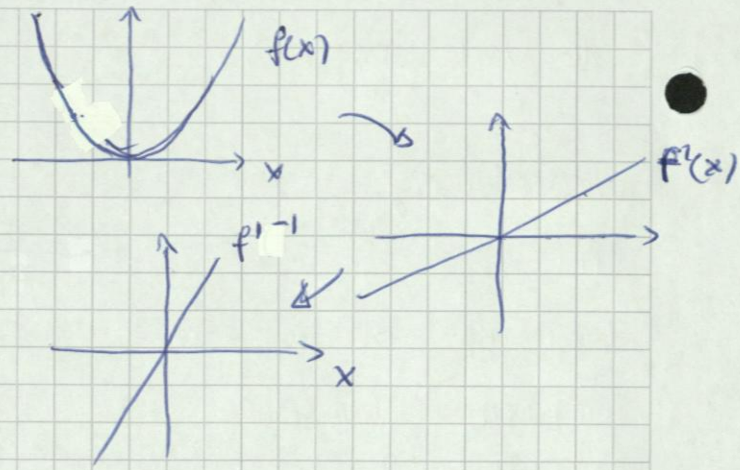
"H $\Rightarrow$ ELG"

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dot{p} \underset{(H)}{=} -\frac{\partial H}{\partial q} = -p\frac{\partial \dot{q}}{\partial q} + \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \dot{q}}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial q} \quad \blacksquare$$

— Einschub —

Geometrie der Legendre-Trafo

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



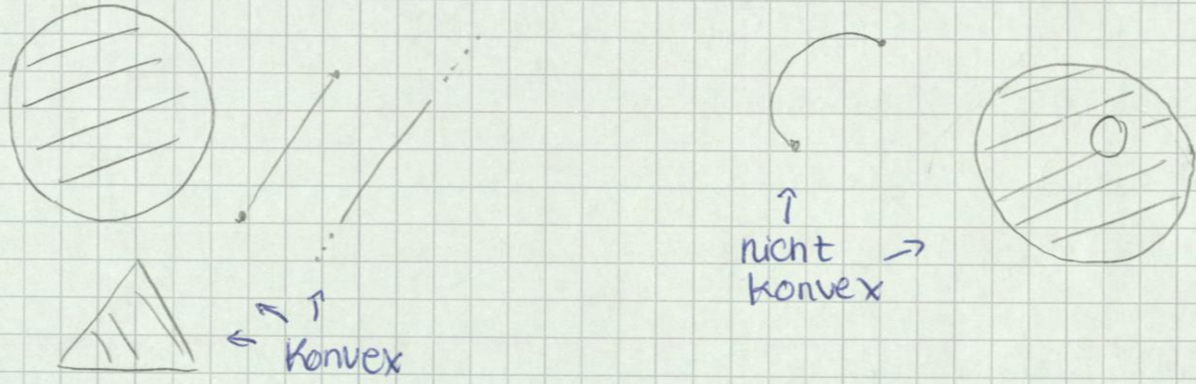
- $f'(x)$ Nehme an, dass f' umkehrbar ist.

$\rightsquigarrow$ es gibt f'^{-1}

- Leg.-Trafo von f:

$$f^*(p) = p\, f'^{-1}(p) - f(f'^{-1}(p))$$

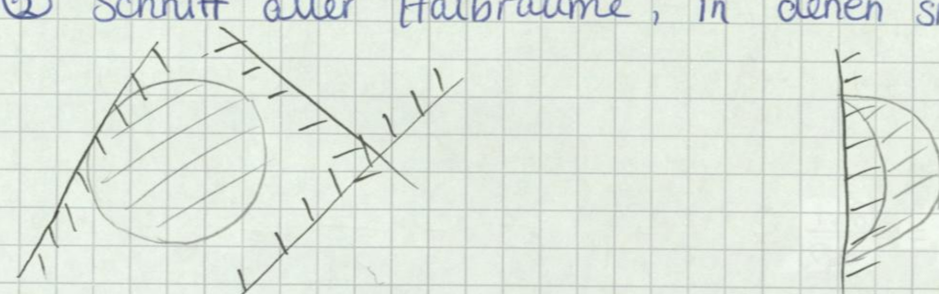
Dazu: Menge M ist konvex wenn alle Verbindungslinien zweier Pkt.e in M, in M enthalten sind



<u>Dualität</u> konvexe Menge ist

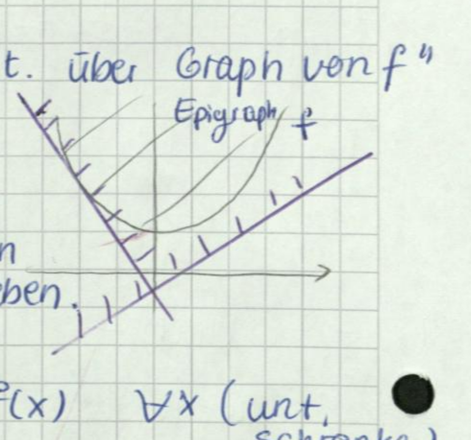
① Vereinigung aller Punkte, die sie enth. oder

② Schnitt aller Halbräume, in denen sie enthalten ist.



Der Epigrafph von f ist "Menge der Pkt. über Graph von f"

Eine Funktion f heißt konvex, wenn Epi(f) konvex ist.



Halbräume, die Epigraph von f enth. werden durch affine untere Schranke an f beschrieben. Also Funktion der Form

$h(x) = p \cdot x - \mu$ (affin), mit $h(x) \leq f(x)$ $\forall x$ (unt. Schranke)

$\Leftrightarrow \mu \geq \sup\limits_x (px - f(x)) =: f^*(p)$

16. Vorlesung | TP 1
Teil. 2 | 13.12.18

Beh: f konvex und diff.bar, dann ist $f^*_{ana}(p) = f^*_{geo}(p)$

Bew.: $\sup_x (xp - f(x))$ angenommen bei x^*

$\Rightarrow$ erste Abl. Sei $x^* = 0$

$\Rightarrow 0 = p - f'(x)$ $\rightsquigarrow$ Punkt, wo Steigung von $f = p$ ist.

$\Leftrightarrow f'^{-1}(p) = x^*$. $\square$

18. Vorlesung

TP 1

20.12.18

Poissonklammer und symplektische Form

Sei $f: \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}$ Fkt. auf dem Phasenraum.

Bsp.: $H(\vec{q}, \vec{p})$ Hamiltonfkt

$L_3 = q_1 p_2 - q_2 p_1$ Drehimpulskomp

"BWGL." für f:

$$\frac{d}{dt} f(\vec{q}(t), \vec{p}(t)) = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t} = \sum_j \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial t}$$

$$= \sum_j \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial f}{\partial q_j} - \frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial f}{\partial p_j} \qquad \text{Poisson - Klammer}$$

$$= \{H, f\}$$

Insbesondere: • f EHG $\Leftrightarrow \{H, f\} = 0$

• BWGL.: $\dot{q}_j = \{H, q_j\}$, $\dot{p}_j = \{H, p_j\}$

Geometrisch: Auf $\mathbb{R}^{2N}$ führe ein die Symplektische Form:

$$\vec{x}, \vec{x}' \in \mathbb{R}^{2N} \rightsquigarrow [\vec{x}, \vec{x}'] = (\vec{x}, J\vec{x}')$$

$[\cdot, \cdot]$ hat z.B. folgende Eigenschaften:

• $[\vec{x}, \vec{y}] = (x, J\vec{y}) = (J\vec{y}, \vec{x}) = (\vec{y}, J^T x)$

$$= -(y, Jx) = -[\vec{y}, \vec{x}] \qquad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ antisymmetrisch

• $[\vec{x}, \vec{x}] = -[\vec{x}, \vec{x}] = 0$

Damit: $\{f, g\} = \sum \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j} - \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \partial g/q_n \\ \partial g/p_1 \\ \vdots \\ \partial g/p_n \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \partial f/\partial q_1 \\ \vdots \\ \partial f/\partial p_n \end{pmatrix} = [\vec{\nabla} g, \vec{\nabla} f]$$

Eigenschaften von $\{\cdot, \cdot\}$:

$\{f, g\} = -\{g, f\}$ anti-Symmetrisch

$\Rightarrow \{H, H\} = 0$ Energie-Erh.

(2) $\{f, g+\lambda h\} = \{f, g\} + \lambda \{f, h\}$ Bilinearität

(3) Produktregel $\{f, gh\} = \{f, g\} h + g\{f, h\}$

(4) Jacobi-Identität:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$$

($\hookrightarrow$ Lie-Algebra)

(5) $\{q_i, q_j\} = 0$

$\{p_i, p_j\} = 0$ (Koordinatenfkt)

$\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}$

Anwendungen

① Noether, aber besser!

f EHG genau wenn f unter dem durch H erzeugten Fluss invariant ist:

$$f(\vec{x}(0)) = f(\vec{x}(t)) = f(\Phi_t^{(H)}(\vec{x}(0)))$$

Damit:

$f(\vec{x}) = f(\Phi_t^{(H)}(\vec{x}))$ f EHG

$\Leftrightarrow$ $\{H, f\} = 0$ $\Leftrightarrow$ $\{f, H\} = 0$ "Trick"

$\Leftrightarrow$ $H(\vec{x}) = H(\Phi_t^{(f)}(\vec{x}))$ $\Leftrightarrow$ Symmetrie von H unter Φ_t^f, der durch f erzeugte Fluss.

Bsp.: $f = L_3 = q_1 p_2 - q_2 p_1$, z-Komponente des Drehimpuls

BWGL.

$$\frac{\partial q_j}{\partial t} = \frac{\partial L_3}{\partial p_j} = \left\{ \begin{array}{cc} & j \\ -q_2 & 1 \\ q_1 & 2 \\ 0 & 3 \end{array} \right\} = (\vec{e_3} \times \vec{q})_j$$

$$\frac{\partial p_j}{\partial t} = -\frac{\partial L_3}{\partial p_j} = \left\{ \begin{array}{cc} -p_2, & 1 \\ p_1, & 2 \\ 0, & 3 \end{array} \right\} = (\vec{e_3} \times \vec{p})_j$$

$\Rightarrow$ Rotation um z-Achse und um ~~den~~ Winkel s.

18. / 19. Vorlesung

TP. 1
20.12.18

(② Kanonische Quantisierung)

Class. : Beobachtbare Größen sind Fkt.: $\mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}$

QM: Phasenraum $\to$ komplexe Fkt. auf "Konfig-Raum" $\mathbb{R}^n$

$\psi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$

Beobachtbare Größen $\rightsquigarrow$ Operatoren auf Fkt-Raum.

Bsp.: Ort $\rightsquigarrow$ Multiplikationsop. $\hat{Q}_j : \psi(\vec{q}) \mapsto q_j \psi(\vec{q})$

Impuls $\rightsquigarrow$ Diff.-Op: $\hat{P}_j : \psi(\vec{q}) \longmapsto i\hbar \frac{\partial}{\partial q_j} \psi(\vec{q})$.

$[\hat{Q}_i, \hat{Q}_j] = \hat{Q}_i \hat{Q}_j - \hat{Q}_j \hat{Q}_i = 0$

$[\hat{P}_i, \hat{P}_j] = \dots = 0$

$[\hat{P}_i, \hat{Q}_j] = \dots = 0$

③ Die Menge der EHG ist unter $\{\cdot, \cdot\}$ abgeschlossen 21.12.18

Also: f, g EHG $\Rightarrow$ $\{f, g\}$ auch EHG.

Beweis: $0 = \{H, \{f, g\}\} = -\underbrace{\{g, \{H, f\}\}}_{=0} - \underbrace{\{f, \{g, H\}\}}_{=0} = 0$

Bsp.: L_1, L_2 erhalten $\Rightarrow$ L_3 erhalten

Bew: $\{L_1, L_2\} = \{q_2 p_3 - q_3 p_2, q_3 p_1 - q_1 p_3\}$

$= \{q_2 p_3, q_3 p_1\} - \underbrace{\{q_2 p_3, q_1 p_3\}}_{} - \underbrace{\dots}_{=0} + \{q_3 p_2, q_1 p_3\}$

$= \{q_2 p_3, q_1\} p_3 + q_1 \{q_2 p_3, p_3\}$

$q_2 \underbrace{\{p_3, q_1\}}_{0} + \underbrace{\{q_2, q_1\}}_{0} p_3 = \dots = 0$

$= q_2 p_1 - q_1 p_2 = -L_3$ ∎

Hasenpopulation im Jahr n

$$x_n = r\, x_{n-1} (1 - x_{n-1})$$