Mathematische Methoden 2

SS 2024 — D. Gross, K. Meinerz, L. Ligthart

Blatt 0. Präsenzübung. Keine Punkte. — (Mit Material von J. Berg. Danke, J!)

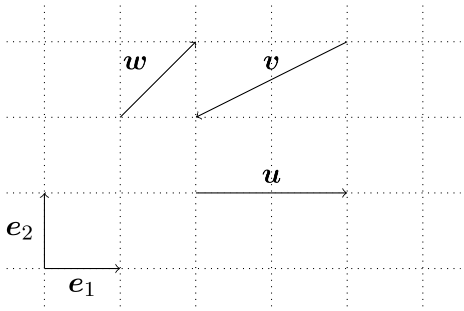
1 Verschiebungen in der Ebene Die in der unten stehenden Abbildung gezeigten Pfeile repräsentieren Vektoren, die hier als Verschiebungen in der Ebene zu interpretieren sind.

a) Skizzieren Sie folgende Linearkombinationen: $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}$, $\frac{1}{2}\boldsymbol{u}$, $2\boldsymbol{w}+3(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\frac{1}{3}\boldsymbol{w})$

b) Bestimmen Sie die Komponenten von $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ bezüglich der Basis $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$.

c) Bestimmen Sie die Komponenten $\mathbf{e}_2$ von $\boldsymbol{e}_2$ bezüglich der Basis $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{w})$.

d) Warum ist $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{u})$ keine Basis für alle Verschiebungen in der Ebene?



2 Komponenten eines Vektors bezüglich einer Basis Gegeben seien zwei Basen $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ und $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ eines dreidimensionalen Vektorraums V. Damit lässt sich jedes $v \in V$ sowohl bezüglich $\mathcal{E}$ als auch bezüglich $\mathcal{F}$ darstellen:

$$v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 = y_1 f_1 + y_2 f_2 + y_3 f_3.$$

Für die Entwicklungskoeffizienten schreiben wir

$$\phi^{\mathcal{E}}(v) = \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \phi^{\mathcal{F}}(v) = \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Für die Beziehung zwischen den beiden Basen gelte

$$f_1 = 2e_1 + e_2 - e_3, \quad f_2 = e_1 + e_3, \quad f_3 = -e_1 + e_2.$$

a) Geben Sie die Komponenten $\phi^{\mathcal{E}}(e_i)$ der Basisvektoren e_i $(i = 1, 2, 3)$ sowie die Komponenten $\phi^{\mathcal{E}}(f_i)$ der Basisvektoren f_i $(i = 1, 2, 3)$ bezüglich der Basis $\mathcal{E}$ an.

b) Sei nun $v \in V$ ein beliebiger Vektor. Angenommen, Sie kennen die Komponenten $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^t = \phi^{\mathcal{E}}(v)$ bezüglich der Basis $\mathcal{E}$. Wie lauten die Komponenten $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^t = \phi^{\mathcal{F}}(v)$ bezüglich der Basis $\mathcal{F}$?

3 Orthonormalsysteme sind linear unabhängig Zeigen Sie, dass ein Orthonormalsystem automatisch linear unabhängig ist. Nutzen Sie, dass eine Menge $\{v_i\}$ von Vektoren genau dann linear unabhängig ist, wenn nur triviale Linearkombinationen verschwinden:

$$x_1 v_1 + \cdots + x_k v_k = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = \cdots = x_k = 0.$$

Hinweis: Skalarprodukte mit v_i sind von Interesse.

4 Kurzgefragt

a) Zeigen Sie, dass $\{1, i\}$ eine Basis von $\mathbb{C}$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist.

b) Zeigen Sie, dass der Schnitt zweier Unterräume wieder ein Unterraum ist.

c) Geben Sie ein Beispiel für zwei Unterräume des $\mathbb{R}^2$, deren Vereinigung *kein* Unterraum ist.

d) Zeigen Sie, dass die Dreiecksungleichung aus der Cauchy-Schwartz-Ungleichung folgt. Hinweis: Quadrieren Sie die beiden Seiten der Dreiecksungleichung.

e) Zeigen Sie die *Parsevalsche Gleichung*: Gegen eine ONB $\{b_i\}$ und einen Vektor $v = \sum_i x_i b_i$, dann gilt

$$\|v\|^2 = \sum_i |x_i|^2 .$$

Warum wird dies als "Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras" bezeichnet?