Mathematische Methoden 2

SS 2024 D. Gross, K. Meinerz, L. Ligthart
Blatt 2, 20 + 6 Punkte, Abgabefrist 21.04.19 (Mit Material von J. Berg. Danke, J!)

---

1 Gram-Schmidt Algorithmus (6 P) Der Gram-Schmidt Algorithmus erlaubt die Umwandlung einer Menge linear unabhängiger Vektoren $S = \{v_i\}$ in eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} = \{b_i\}$ für den Spann von S.

Eine Beschreibung finden Sie im Skript und in jedem Lehrbuch. Hier ist die Kurzfassung: Im ersten Schritt setze $b_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$. Und dann, für alle $i > 1$:

$$w_i = v_i - \sum_{j=1}^{i-1} b_j \langle b_j, w_i \rangle, \qquad b_i = \frac{w_i}{\|w_i\|}$$

Gegeben seien nun folgende Vektoren:

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) (6P) Wende den Gram-Schmidt-Algorithmus auf $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ an. Bitte die Zwischenschritte angeben, nicht nur das Ergebnis!

b) (Optional: 6 Zusatzpunkte) Gram-Schmidt wird selten von Hand berechnet. Schreibe ein Programm für die automatische Berechnung von Basisvektoren. Jede übliche Programmiersprache ist akzeptable, aber Julia wird besonders empfohlen.

2 Lineare Abbildungen und Matrixdarstellung (10 P) Wir definieren die Basen $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ für $\mathbb{R}^3$ und $\mathcal{B}' = \{\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2\}$ für $\mathbb{R}^2$. Betrachte die Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : \ (x_1, x_2, x_3) \mapsto (3x_1 - x_3, x_1 + x_2 + x_3)$, von $\mathbb{R}^3$ auf $\mathbb{R}^2$.

a) (2 P) Zeige, dass die F eine lineare Abbildung ist.

b) (2 P) Gesucht ist die Darstellung von F bzgl. der Basen $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$.

Sei $\mathcal{P}_n$ der Raum der reellen Polynome vom Grad kleiner oder gleich n. Wir wählen als Basis $\mathcal{B}_n := \{x^0, x^1, x^2, \dots, x^n\}$, die Menge der Monome.

c) (2 P) Geben Sie die Matrixdarstellung der zweifachen Ableitung $\partial_x^2 : p \mapsto p''$ an.

Im $\mathbb{R}^2$ wählen wir die Basen $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$, $\mathcal{B}' = \{\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2\}$. Sei S_y die Spiegelung an der y-Achse. Sei R_θ die Drehung um den Koordinatenursprung um den Winkel θ.

d) (2 P) Skizziere die Basen und ihre Bilder unter den beiden Abbildungen in einem Koordinatensystem.

e) (2 P) Gib die Matrixdarstellungen von S_y und R_θ, jeweils bzgl. $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ an. Bitte je ein Satz Begrünung!

3 Komplexe Zahlen (4 P) Hier fassen wir die komplexen Zahlen $\mathbb{C} = \{z = x + y\,i \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}$ als Vektorraum über $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ mit Basis $\mathcal{B} = \{1, i\}$ auf.

a) (2 P) Über $\mathbb{R}$ ist die komplexe Konjugation $z \mapsto \bar{z}$ linear. Gibt die Matrixdarstellung bzgl. $\mathcal{B}$ an.

b) (2 P) Sei $re^{i\phi}$ eine komplexe Zahl in Polardarstellung. Die Multiplikation $z \mapsto re^{i\phi}z$ ist linear. Gibt die Matrixdarstellung bzgl. $\mathcal{B}$ an.