Klassische Mechanik

WS 2020/21 — David Gross, David Wierichs, Markus Heinrich, Johan Åberg

Nachklausur. **Matrikeln. 9999998** — Institut für Theoretische Physik, Universität zu Köln

Exercise	1	2	3	4	5	6	7	Total
Points								
	6	8	6	7	8	5	8	48
Initials								

Nützliche Formeln

- **Noether-Theorem**. Sei $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$ eine Lagrange-Funktion. Wenn für eine Koordinatentransformation $\vec{q} \mapsto \vec{q}' = \vec{\Phi}^{(s)}(\vec{q})$ gilt, dass

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L\left(\vec{\Phi}^{(s)}(\vec{q}(t)), \frac{d}{dt}\vec{\Phi}^{(s)}(\vec{q}(t))\right) = 0,$$

  dann ist

$$I = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\vec{\Phi}_j^{(s)}}{ds}\Big|_{s=0}$$

  eine Erhaltungsgröße.

- **Poisson-Klammern**

$$\{f, g\} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial p_n} \frac{\partial g}{\partial q_n} - \frac{\partial f}{\partial q_n} \frac{\partial g}{\partial p_n} \right)$$

- Denken Sie daran, genau auf Zeitableitungen zu achten und ggf. in das Dokument zu zoomen, wie zum Beispiel in diesen nützlichen Formeln:

$$0 = \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}},$$
$$H = p\dot{q} - L,$$
$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}.$$

Anleitung E-Klausur TP 1

Mit der Abgabe der elektronischen Klausur bestätigen Sie, dass Sie die nachfolgende Anleitung gelesen und verstanden haben, sowie dass Sie die Regeln akzeptieren.

Der folgende Text stand seit der Probeklausur unverändert auf der Webseite.

Zunächst:

- Dokument ist ganz schön schrecklich. Seitenweise Prüfungsregeln, als Reaktion auf ein tödliches Virus. Der reine Horror... Und, ja, Corona ist nen Mist. Aber bitte, so weit wie möglich, entspannen Sie sich. Am Ende wird die Prüfung nicht schwieriger als sonst. (Wir machen diesen Job nicht, weil es uns ein primäres Anliegen wäre, Studierende zu kontrollieren oder in die Pfanne zu hauen.) Und freuen Sie sich auf das Sommersemester, wenn wir über Quantenmechanik reden (yeah!) und nicht mehr über Prüfungsregeln, und hoffentlich fast nicht mehr über das Infektionsgeschehen oder Aerosole mit Ah-Eh oder Inzidenzraten oder andere Unworte.

Sie benötigen:

- ...einen Laptop / Tablet / ein Telefon das zuverlässig ein Kamerabild von Ihnen per Zoom übertragen kann.
- ...eine Möglichkeit, Ihre Rechnungen am Ende der Zeit abzufotografieren, zu scannen oder sonstwie digital zu erfassen und als einzelnes PDF per Email zu verschicken.
- ...einen ruhigen Raum, den Sie in der Zeit der Klausur alleine und ungestört nutzen können.
- ...eine Kölner Matrikelnummer, mit der Sie sich zur Klausur angemeldet haben.
- ...Studierendenausweis und einen Ausweis mit Foto.

Vor der Klausur:

- Melden Sie sich wie gewohnt zur Klausur an. Wenn Sie sich nicht anmelden können (z.B. Schülerstudierende), melden Sie sich bei uns.
- Öffnen Sie 15 Minuten vor der Klausur den üblichen Zoom-Raum der Vorlesung.
- Es gibt zwei Breakout-Räume: den Hauptraum und einen Raum für Fragen+Antworten. Wir werden Sie den jeweiligen Räumen zuweisen.
- Notfall-Telefonnummern: 0221 470 - 89239, 89207 (English), 1037.

  Am besten aufschreiben. Bei akuten und ernsten Internetproblemen rufen Sie bitte umgehend an!

Während der Klausur:

- Zu Beginn der Klausur veröffentlichen wir auf der Kursseite einen Link über den Sie die Klausur als PDF abrufen können. Es wird eine individuelle Klausur pro Matrikelnummer geben. Die Matrikelnummer wird auch im PDF selbst promiment dargestellt sein. Überprüfen Sie unbedingt, dass Sie die richtige Klausur bearbeiten!
- Bitte lassen Sie die Kamera während der Prüfung so auf sich gerichtet, dass wir Sie beim Schreiben beobachten können.

- Behalten Sie das Chat-Fenster im Auge. Dort werden wir Ankündigungen machen, die Antworten auf Fragen für alle sichtbar veröffentlichen, und sie auch individuell ansprechen, wenn wir Ihren Ausweis prüfen wollen oder es Probleme mit Ihrer Übertragung gibt.
- Wenn Sie eine Frage haben, nutzen Sie bitte die Zoom-Funktion "Hand heben", oder schreiben Sie per Zoom-Chat an Johan Aberg oder einen der Tutoren. Bitte keine Nachrichten an Älleßchicken!
- Schreiben Sie ihre Matrikelnummer auf die Zettel (aber nach Möglichkeit bitte nicht Ihren Namen oder andere personenbezogene Daten - damit der Datenschutz uns nicht ins Gefängnis schickt wenn wir die Klausuren in der "Cloud"korrigieren).

Nach der Klausur:

- Erstellen Sie ein PDF-Dokument und schicken Sie es an exams-gross@uni-koeln.de.
- Wir werden jede erfolgreich eingegangen Email zügig bestätigen. Bitte halten Sie sich verfügbar, bis Sie die Bestätigung erhalten haben. Kontaktieren Sie uns im Zoom-Chat, wenn Sie nach einigen Minuten keine Bestätigung bekommen haben.
- Bewahren Sie ihre Unterlagen auf! Z.B. für den Fall, dass wir etwas nicht lesen können.

Erlaubt:

- Die Klausur ist Öpen Book". Sie können beliebige Notizen oder Bücher verwenden. Sie dürfen auch elektronische Dokumente (PDF o.Ä.) verwenden. Bitte nicht online ("Google") oder in elektronischen Dokumenten nach Stichworten suchen - nicht weil wir prinzipiell etwas dagegen haben, sondern weil wir es nicht von Chatten unterscheiden können. Siehe unten. (Hinweis: Zu viel Material wird sie mehr ablenken als Ihnen helfen. Wir empfehlen das VL-Skript, ihre Übungszettel und vielleicht ein Lehrbuch das Sie gut kennen).
- Toilettengang. Bitte wie in Präsenz auch üblich per "Hand heben"Tutor kontaktieren. Dann entlassen wir Sie kurz.

Nicht gestattet

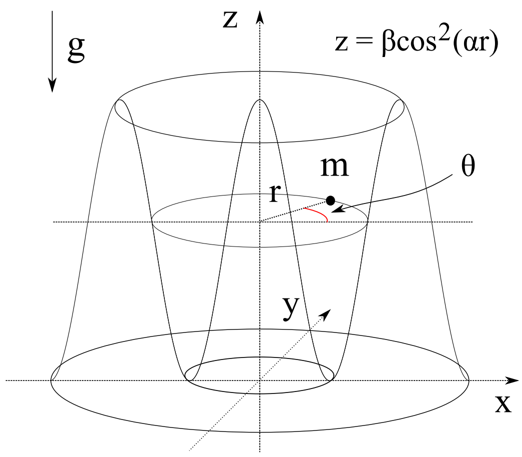
- Jede Form der Kommunikation während der Prüfung! Ernsthaft!

Fragen und Antworten (wird laufend aktualisiert werden)

- Mir fehlen technische Geräte / ein ruhiger Ort / Kinderbetreuung o.Ä. Was nun?
  - Bitte versuchen Sie zunächst im persönlichen Umfeld Hilfe zu bekommen. Wenn das nicht möglich ist, wenden Sie sich an uns. Im begrenzten Maß können wir z.B. Geräte oder Einzelbüros zur Verfügung stellen.
- Kann ich auf einem Tablet statt auf Papier schreiben?
  - Ja.
- Mein Internet ist meistens OK, wackelt aber manchmal.
  - Schon OK. Rufen Sie uns per Telefon an, wenn es zu unstabil wird. Im schlimmsten Fall müssen wir die Prüfung wiederholen.

- Es gibt viele neue Regeln! Wird jeder Verstoß (wackliges Internet, Kamera ist mal falsch ausgerichtet, o.Ä.) als Täuschung gewertet?
  - Nein. Wenn wir uns nicht sicher sind, dass alles mit rechten Dingen zugegangen ist, dann werden wir die Prüfung später auf geeignete Art wiederholen. (In eindeutigen Fällen ist das natürlich anders! Also wer z.B. eine Lösung einer anderen personalisierten Klausur abgibt, hat ein echtes Problem!)
- Muss das PDF angehängt sein, oder geht auch ein Link auf einen Cloud-Anbieter (FileShare, Google Drive o.Ä.)?
  - Geht auch. Hauptsache, wir können das abrufen.
- Ich habe nur eine Kamera. Mit der kann ich mich filmen, muss sie aber auch verwenden, um hinterher die Klausur zu fotografieren. Dazu muss ich dann Zoom beenden.
  - Ist OK. Bitte zügig arbeiten. Bitte im Anschluss noch mal im Zoom einloggen, falls wir Rückfragen haben.
- Welche Software soll ich verwenden um ein PDF zu erstellen?
  - Es gibt viele Lösungen. Office Lens funktioniert ganz gut. Bitte vorher mal testen. Auch bitte testen, ob Ihr Email-Anbieter das Versenden großer Dateien erlaubt.

1 Bestimmen der Lagrange-Funktion (6 Punkte)



Ein Teilchen der Masse m gleite ohne Reibung auf einer Oberfläche. Die Oberfläche sei gegeben, indem man die Funktion $z = \beta\cos^2(\alpha r)$ mit $r \geq 0$ um die z-Achse rotiere, wobei $\alpha, \beta > 0$ Konstanten seien und r den radialen Abstand von der z-Achse beschreibe, das heißt $r^2 = x^2 + y^2$. Das Teilchen stehe unter dem Einfluss einer konstanten Gravitationsbeschleunigung g in die negative z Richtung. Es sei außerdem θ der Drehwinkel um die z-Achse, gemessen von der x-Achse aus (siehe Abb.).

Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion für das Teilchen in Abhängigkeit der Koordinaten r und θ.

2 Euler-Lagrange Gleichungen (4 + 2 + 2 = 8 Punkte)

Betrachten Sie die folgende zeitabhängige Lagrange-Funktion

$$L(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}, t) = \frac{\alpha}{2}t^4\dot{r}^2 + \frac{\alpha}{2}t^4 r^2\dot{\theta}^2,$$

wobei $\alpha > 0$ eine Konstante sei.

a) *Bestimmen Sie die Euler-Lagrange Gleichungen für r und θ.*

b) *Bestimmen Sie die zyklischen Koordinaten und die zugehörige Erhaltungsgröße.*

c) *Verwenden Sie das Ergebnis aus b) um eine Bewegungsgleichung für r zu erhalten, welche nicht von θ (oder $\dot{\theta}$) abhängt.*

3 Von Lagrange zu Hamilton (3 + 3 = 6 Punkte)

Betrachten Sie die Lagrange-Funktion

$$L(x, \dot{x}, y, \dot{y}, z, \dot{z}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\dot{y}^2 + \frac{m}{2}\dot{z}^2 + \alpha z^2\dot{x} + \beta y^3\dot{y} + \gamma(x+y)\dot{z} - \delta x^2,$$

wobei $m > 0$ und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ Konstanten seien.

a) *Bestimmen Sie die konjugierten Impulse zu x, y und z.*

b) *Bestimmen Sie die Hamilton-Funktion.*

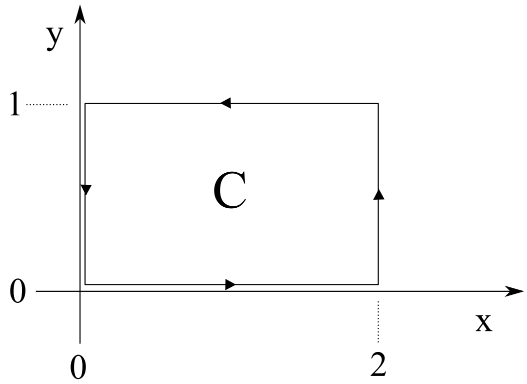
4 Arbeit in einem Kraftfeld (7 Punkte)

Betrachten Sie ein Teilchen in der Ebene ($\mathbb{R}^2$), das unter dem Einfluss eines Kraftfelds $\vec{F}(x,y)$ der Form

$$\vec{F}(x,y) = -y^3\hat{x} + x\hat{y}$$

steht, wobei $\hat{x}$ und $\hat{y}$ orthogonale Einheitsvektoren seien. Angenommen das Teilchen werde entlang einer geschlossenen Kurve C bewegt, wie in der Abbildung dargestellt.

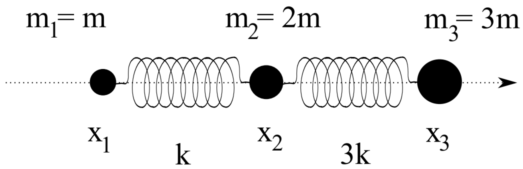
Berechnen Sie die verrichtete Arbeit $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$. Ist dieses Kraftfeld konservativ oder nicht?



Hinweis: Es gibt mehr als eine Methode, diese Aufgabe zu lösen.

5 Normalmoden (4 + 4 = 8 Punkte)

Drei Teilchen seien auf die Bewegung in einer Dimension ($\mathbb{R}$) eingeschränkt und seien durch die Koordinaten x_1, x_2 und x_3 beschrieben. Teilchen 1 habe die Masse $m_1 = m$, Teilchen 2 die Masse $m_2 = 2m$ und Teilchen 3 die Masse $m_3 = 3m$, wobei $m > 0$ eine Konstante sei. Zwischen den Teilchen 1 und 2 wirke eine harmonische Kraft mit der Federkonstanten $k > 0$. Zwischen Teilchen 2 und 3 wiederum wirke eine harmonische Kraft mit Federkonstante $3k$. (Es gebe keine weitere Kraft zwischen den Teilchen 1 und 3.)



a) *Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichungen in der Form*

$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{x} = \boldsymbol{M}\vec{x}, \qquad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

geschrieben werden können und bestimmen Sie die Marix $\boldsymbol{M}$.

b) *Bestimmen Sie die Frequenzen der Normalmoden.*

Hinweis: Die Frequenzen kann man als die Zahlen ω im Ansatz $\vec{x}(t) = e^{i\omega t}\vec{v}$ verstehen. Beachten Sie, dass Sie nicht die Normalmoden selbst, sondern lediglich ihre Frequenzen bestimmen sollen.

6 Kanonische Transformationen **(5 Punkte)**

Betrachten Sie die Transformation der Koordinaten (q, p) zu (Q, P), die durch

$$P = \exp\left(\alpha \frac{q}{p}\right), \quad Q = \frac{1}{2} p^2 \exp\left(\beta \frac{q}{p}\right)$$

gegeben ist. *Für welche Werte von α und β ist dies eine kanonische Transformation?*

7 Schwingende Saite **(4 + 4 = 8 Punkte)**

Die Transversalschwingungen einer idealen harmonischen Saite erfüllt die Differentialgleichung

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} - \frac{E}{\rho}\frac{d^2}{dz^2}\right] h(z, t) = 0, \tag{1}$$

wobei $h(z)$ die Auslenkung aus der Ruhelage am Ort z, E der Elastizitätsmodul und ρ die Dichte der Saite sind.

a) Nehmen Sie an, die Saite sei an den Endpunkten $z = 0$ und $z = L$ in der Ruhelage fixiert, also

$$h(0, t) = 0, \quad h(L, t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Betrachten Sie die Funktionen

$$\sin\left(tk\sqrt{\frac{E}{\rho}}\right) v_k(z), \quad \cos\left(tk\sqrt{\frac{E}{\rho}}\right) v_k(z), \tag{3}$$

wobei $v_k(z) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(kz)$. *Zeigen Sie, dass die Funktionen in* (3) *Lösungen von* (1) *und* (2) *sind und bestimmen Sie die erlaubten Werte für k.*

b) Angenommen, die Saite sei anfangs in der Position

$$\begin{aligned} h(z, 0) =& 6\sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{3z\pi}{L}\right) + 2\sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{5z\pi}{L}\right), \\ \frac{\partial h}{\partial t}(z, 0) =& 0, \end{aligned}$$

wobei die zweite Gleichung ausdrückt, dass die Saite zu Beginn in Ruhe ist.

Berechnen Sie den Wert $h\left(\frac{L}{2}, L\sqrt{\frac{\rho}{E}}\right)$.

Hinweis: Für die erlaubten Werten von k sind die Funktionen $v_k(z)$ orthonormal. Außerdem können alle physikalisch sinnvollen Lösungen als Linearkombination der Funktionen in (3) (mit den erlaubten Werten von k) geschrieben werden.