Klassische Mechanik

WS 2021/22 David Gross, David Wierichs, Johan Åberg

Nachklausur. **Matrikeln. 7382646** Institut für Theoretische Physik, Universität zu Köln

Exercise	1	2	3	4	5	6	7	Total
Points								
	6	8	7	8	11	5	5	50
Initials								

Nützliche Formeln

- **Noether-Theorem**. Es sei $L(\vec{q},\dot{\vec{q}})$ eine Lagrange-Funktion. Falls eine Koordinatentransformation $\vec{q} \mapsto \vec{q}' = \vec{\Phi}^{(s)}(\vec{q})$ die Bedingung

  $$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L\Big(\vec{\Phi}^{(s)}\big(\vec{q}(t)\big), \frac{d}{dt}\vec{\Phi}^{(s)}\big(\vec{q}(t)\big)\Big) = 0,$$

  erfüllt, dann ist

  $$I = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\vec{\Phi}_j^{(s)}}{ds}\Big|_{s=0}$$

  eine Erhaltungsgröße.

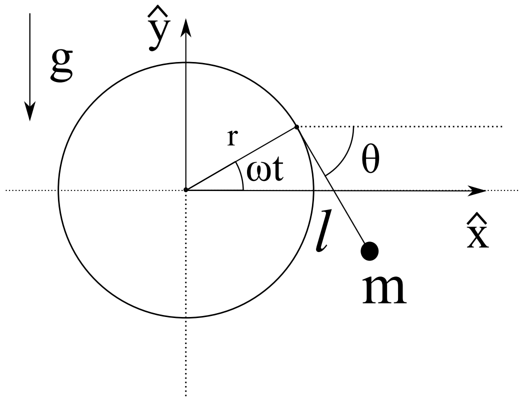
- **Poisson-Klammern**

  $$\{f,g\} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial p_n}\frac{\partial g}{\partial q_n} - \frac{\partial f}{\partial q_n}\frac{\partial g}{\partial p_n} \right)$$

- Achten Sie genau auf totale Zeitableitungen, die als Punkt geschrieben werden, und vergrößern Sie das Dokument auf Ihrem Endgerät entsprechend. Folgende Formeln sind nützlich und können gleichzeitig als Test für die Lesbarkeit verwendet werden:

  $$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \\ H &= p\dot{q} - L, \\ \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \end{aligned}$$

1 Aufstellen der Lagrange-Funktion (6 Punkte)



Ein masseloser Stab der Länge l sei an einem Ende am Umfang eines Rades mit Radius r befestigt. Am anderen Ende des Stabs befinde sich eine Masse m. Das Rad rotiere mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω. Sowohl das Rad als auch der Stab bewegen sich in der x-y Ebene, wobei $\hat{y}$ der vertikale Einheitsvektor sei, der nach oben zeigt, und $\hat{x}$ der horizontale Einheitsvektor nach rechts sei. Der Stab könne frei rotieren, ohne mit dem Rad zu kollidieren. Auf die Masse m wirke außerdem die Gravitationsbeschleunigung g in die Abwärtsrichtung.

Stellen Sie die Lagrange-Funktion für dieses System bezüglich des Winkels θ zwischen dem Stab und der Horizontalen (nach rechts) auf (siehe Abbildung).

2 Euler-Lagrange-Gleichungen (4 + 2 + 2 = 8 Punkte)

Ein Teilchen werde durch die Lagrange-Funktion

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) = \frac{m_0}{2} y^2 \dot{x}^2 + \beta \sin(\gamma t) \dot{y}^2,$$

beschrieben, wobei m_0, β und γ Konstanten seien.

a) *Ermitteln Sie die Bewegungsgleichungen für x und y mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen.*

b) *Bestimmen Sie die zyklischen Koordinaten und die zugehörigen Erhaltungsgrößen*

c) *Verwenden Sie das Ergebnis aus b) um eine Bewegungsgleichung für y aufzustellen, die nicht von x oder $\dot{x}$ abhängt.*

Hinweis: Eliminieren Sie die zyklischen Koordinaten aus einer der Bewegungsgleichungen.

3 Von Lagrange zu Hamilton (2 + 3 + 2 = 7 Punkte)

Betrachten Sie die Lagrange-Funktion

$$L(y, \dot{y}, z, \dot{z}) = \frac{m}{2} z^2 \dot{y}^2 + \frac{m}{2} y^4 \dot{z}^2 - \beta (y - z)^2,$$

wobei m und β Konstanten seien.

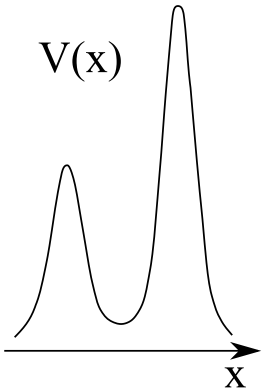
a) *Bestimmen Sie die verallgemeinerten Impulse zu y und z.*

b) *Ermitteln Sie die Hamilton-Funktion.*

c) *Stellen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen auf.*

4 Phasenraumporträt **(2 + 6 = 8 Punkte)**

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m, das sich in einer Dimension bewege und unter dem Einfluss des Potentials $V(x)$ in der folgenden Abbildung stehe.



a) *Wo liegen die Gleichgewichtspunkte in diesem Potential? Was können Sie über die Stabilität dieser Punkte sagen?*

b) *Skizzieren Sie das Phasenraumporträt. Tragen Sie die elliptischen und hyperbolischen Fixpunkte ein. Zeichnen Sie die Niveaulinien mit der Energie der hyperbolischen Fixpunkte (die Separatrizen) ein. Zeigen Sie die Richtung des Flusses in den verschiedenen Bereichen an, die durch die Separatrizen voneinander getrennt werden.* Beachten Sie, dass lediglich eine qualitative Skizze gefordert ist.

5 Schwingende Saite **(4 + 7 = 11 Punkte)**

Die transversalen Schwingungen einer idealen harmonischen Saite werden durch die Differentialgleichung

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} - \frac{E}{\rho}\frac{d^2}{dz^2}\right] h(z,t) = 0, \tag{1}$$

beschrieben, wobei $h(z,t)$ die Auslenkung der Saite aus der Gleichgewichtslage am Ort z zur Zeit t ist. E ist hierbei der Elastizitätsmodul und ρ beschreibt die Dichte der Saite.

a) Nehmen Sie an, die Saite sei an den Positionen $z = 0$ und $z = 5L$ in der Gleichgewichtslage fixiert, d.h.

$$h(0,t) = 0, \quad h(5L,t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Betrachten Sie weiterhin die Funktionen

$$\sin\left(tk\sqrt{\frac{E}{\rho}}\right) v_k(z), \quad \cos\left(tk\sqrt{\frac{E}{\rho}}\right) v_k(z). \tag{3}$$

mit $v_k(z) = \sqrt{\frac{2}{5L}}\sin(kz)$. *Zeigen Sie, dass die Funktionen in (3) Lösungen von (1) sind. Bestimmen Sie die Werte von k, für die diese Funktionen außerdem (2) erfüllen.*

b) Angenommen, die Saite sei zu Beginn in der Konfiguration

$$\begin{aligned} h(z,0) =& 2\sqrt{\frac{2}{5L}}\sin\left(\frac{\pi}{5L}z\right), \\ \frac{\partial h}{\partial t}(z,0) =& 12\frac{\pi}{5L}\sqrt{\frac{2}{5L}}\sqrt{\frac{E}{\rho}}\sin\left(4\frac{\pi}{5L}z\right) \end{aligned} \tag{4}$$

.

wobei die zweite Gleichung ausdrückt, dass die Saite nicht in Ruhe losgelassen wird, sondern eine Startgeschwindigkeit hat.

Berechnen Sie den Wert $h\left(z = \frac{5L}{4}, t = \frac{5L}{4}\sqrt{\frac{\rho}{E}}\right)$.

Hinweis: Für die erlaubten Werte von k bilden die Funktionen $v_k(z)$ eine orthonormale Menge. Außerdem lassen sich alle physikalischen Lösungen als Linearkombination der Funktionen in (3) schreiben (wiederum für die erlaubten Werte von k). Betrachten Sie die allgemeine Form, die $h(z,t)$ in dieser Basis annimmt, sowie ihre Zeitableitung. Vergleichen Sie mit (4).

6 Erhaltungsgrößen mittels Poisson-Klammern (5 Punkte)

Betrachten Sie ein System mit Koordinaten Q_1 und Q_2 und zugehörigen verallgemeinerten Impulsen P_1 und P_2. Die Hamilton-Funktion sei durch

$$H = e^{2Q_2} + e^{2Q_1} + P_1^2 e^{-2Q_1} + P_2^2 e^{-2Q_2} + 2P_1P_2e^{-Q_1-Q_2}. \tag{5}$$

gegeben. Betrachten Sie weiterhin die Funktion

$$W = \alpha e^{Q_2} + \beta e^{Q_1}.$$

Verwenden Sie Poisson-Klammern um zu ermitteln, für welche Werte von $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *die Größe* W *eine Erhaltungsgröße bezüglich* H *in* (5) *ist.*

7 Noether-Theorem (3 + 2 = 5 Punkte)

Betrachten Sie ein Teilchen mit der Lagrange-Funktion

$$L(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\dot{y}^2 + \frac{m}{2}\dot{z}^2 - 28x^2 + 21xz + 8xy - 6yz,$$

wobei m die Masse des Teilchens sei.

a) *Zeigen Sie, dass*

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} L\left(\vec{\Phi}^{(s)}(\vec{q}(t)), \frac{d}{dt}\vec{\Phi}^{(s)}(\vec{q}(t))\right) = 0,$$

für Transformationen der Form

$$(x,y,z) \mapsto \vec{\Phi}^{(s)}(x,y,z) = (x+s, y+\frac{7}{2}s, z+\frac{4}{3}s).$$

gilt.

b) *Ermitteln Sie mithilfe des Satzes von Noether die Erhaltungsgröße bezüglich der Transformation in a).*