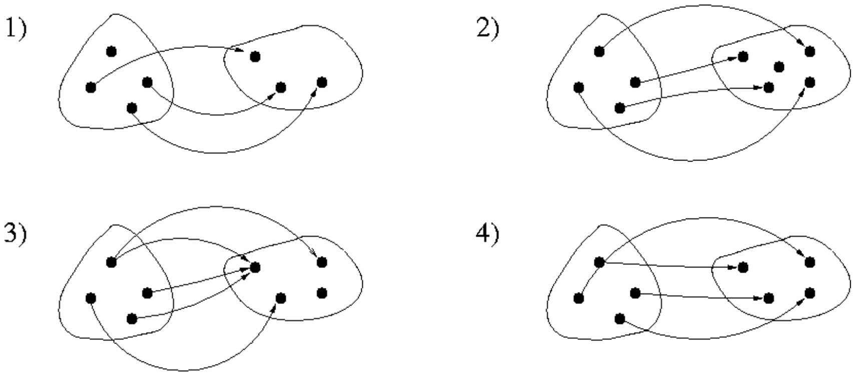
7. Übungsblatt zum Vorkurs Physik

Sommersemester 2016

`https://lecture.ph1.uni-koeln.de/mod/book/view.php?id=1856&chapterid=82`
`http://www.thp.uni-koeln.de/gross/prepcourse-spring-16.html`

1. Funktionen I

a) Welche der folgenden Zuordnungvorschriften sind Funktionen?



b) Welche der Funktionen aus a) sind injektiv, surjektiv oder bijektiv?

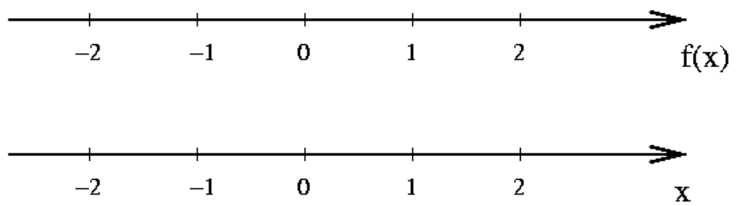
c) Finden Sie (analog zu den Beispielen in Teil a)) ein Beispiel für eine Funktion, die surjektiv aber nicht injektiv ist.

2. Funktionen II

a) Charakterisieren Sie die Funktion $f(x) = 2x + 1$

- in Worten,
- durch eine Wertetabelle,
- durch ein Mengenbild,
- graphisch.

b) Eine etwas ungewöhnliche graphische Darstellung benutzt parallele x- und $f(x)$-Achsen:



Stellen Sie die Funktion aus a) entsprechend graphisch dar!
Überlegen Sie allgemein, wie die “Graphen“ von monotonen, injektiven, surjektiven,... Funktionen in dieser Darstellung aussehen.

3. Funktionen III

a) Skizzieren Sie die folgenden Funktionen! Geben Sie die maximalen Definitionsbereiche $D \subset \mathbb{R}$ sowie die Bildmengen $f(D) = \{f(x)|x \in D\}$ an und untersuchen Sie, ob die Funktionen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind.

$$\begin{aligned}
&1) \quad f\colon D \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x^2}\\
&2) \quad f\colon D \to \mathbb{R}_0^+,\ x \mapsto |x|\\
&3) \quad f\colon D \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}\\
&4) \quad f\colon D \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x \in \mathbb{R}^- \ , \\ x^2 & \text{für } x \in \mathbb{R}_0^+ \ , \end{cases}
\end{aligned}$$

b) Ist jede Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ surjektiv, wenn sie auf ihre Bildmenge eingeschränkt wird (also $\tilde{f} : D \to f(D)$) ?

4. Monotonie

a) Welche der folgenden Funktionen ist monoton, welche sogar streng monoton?

$$\begin{aligned}
&1) \quad f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}\\
&2) \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1\\
&3) \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 + 3\\
&4) \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} .
\end{aligned}$$

b) Zeigen Sie: Jede streng monotone Funktion ist injektiv. Ist umgekehrt auch jede injektive Funktion streng monoton?

5. Umkehrfunktion

a) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion von

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

zeichnerisch. Wie lautet die Umkehrfunktion explizit? Zeigen Sie durch Nachrechnen, dass $f^{-1} \circ f(x) = x$ und $f \circ f^{-1}(x) = x$.

b) In welchen Definitions- und Wertebereichen ist die Funktion

$$f(x) = x^2 + bx + c$$

umkehrbar und wie lautet dort die Umkehrfunktion? Hierbei seien $b, c \in \mathbb{R}$.

6. Zusatzaufgabe: Definition des Grenzwerts

Eine Folge (a_n) mit $a_n \in \mathbb{R}$ heißt *konvergent* gegen einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, wenn gilt

$$\forall_{\delta>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{n>N} : |a_n - a| < \delta\ .$$

Man schreibt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Ein Folge heißt *divergent*, wenn sie nicht konvergent ist.

a) Machen Sie sich anschaulich klar, was diese Definition bedeutet!

b) Zeigen Sie mit obiger Definition:

(i) Die Folge $a_n = \dfrac{1}{n}$ konvergiert mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(ii) Die Folge $a_n = q^n$ konvergiert für $0 \le q < 1$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Anleitung: Suchen Sie zu einem beliebigen $\delta > 0$ eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ (abhängig von δ), so dass Sie zeigen können, dass für ein beliebiges $n > N$ der „Abstand“ $|a_n - a| < \delta$ wird.

(iii) Die Folge $a_n = n$ ist divergent.

Anleitung: Zeigen Sie für beliebiges $a \in \mathbb{R}$, dass z.B. für $\delta = 1$ zu jedem $N \in \mathbb{N}$ ein $n > N$ existiert, so dass $|a_n - a| \ge \delta$ wird. Eine Folge (a_n) ist also divergent, wenn gilt:

$$\forall_{a\in\mathbb{R}}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{N\in\mathbb{N}}\ \exists_{n>N} : |a_n - a| \ge \delta\ .$$