
8. Übungsblatt zum Vorkurs Physik

Sommersemester 2016

<https://lecture.ph1.uni-koeln.de/mod/book/view.php?id=1856&chapterid=82>

<http://www.thp.uni-koeln.de/gross/prepcourse-spring-16.html>

7. Stetigkeit

Untersuchen Sie anhand der Graphen folgende Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ auf Stetigkeit:

$$1) \quad f(x) = \begin{cases} -x & \text{für } x < 1 \\ x^3 - x^2 & \text{für } x \geq 1 \end{cases} \quad 2) \quad f(x) = \begin{cases} -x & \text{für } x < 1 \\ x^3 - 2x^2 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

8. Potenzfunktion

a) Berechne

$$(i) : 3^4, \quad (ii) : 2^{-3}, \quad (iii) : 16^{1/4}, \quad (iv) : 64^{-1/4}.$$

b) Zeige ausgehend von

$$x^A \cdot x^B = x^{A+B}, \quad (x^A)^B = x^{A \cdot B} \quad \text{und} \quad x^0 = 1$$

(wobei $x \in \mathbb{R}^+$ und $A, B \in \mathbb{R}$), dass

$$x^{-A} = \frac{1}{x^A}.$$

9. Radioaktiver Zerfall

Von einer radioaktiven Substanz sei anfangs ($t = 0$) eine Menge $m(0) = m_0 = 10$ Masseneinheiten vorhanden. Nach t Tagen ist ihr Bestand auf $m(t) = m_0 e^{-\beta t}$ zerfallen mit der Zerfallskonstanten $\beta = 0.02 \text{ d}^{-1}$.

- Wann wird nur noch die Hälfte der Substanz vorhanden sein?
- Welche Menge zerfällt im Laufe des ersten Tages, welche im Verlauf des 30. Tages?
- Wie viel Prozent der jeweils vorhandenen Substanz zerfällt im Lauf des 1. bzw. 30. Tages?
- Welche der Ergebnisse der vorangegangenen Teilaufgaben sind von der konkreten Wahl für m_0 abhängig?

10. Hyperbolische Funktionen

Die hyperbolischen Funktionen *sinus hyperbolicus* und *cosinus hyperbolicus* sind durch

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

definiert.

- a) Skizzieren Sie den Verlauf der Funktionen! Wie verhalten sie sich für $x \rightarrow \pm\infty$?
b) Zeigen Sie mit Hilfe der bekannten Eigenschaften der Exponentialfunktion folgende Beziehungen:

1. $\sinh(-x) = -\sinh(x)$ bzw. $\cosh(-x) = \cosh(x)$
2. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
3. $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cdot \cosh y \pm \cosh x \cdot \sinh y$
4. $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cdot \cosh y \pm \sinh x \cdot \sinh y$

11. Rechenregeln für Logarithmen

- a) Beweisen Sie die folgenden Gleichungen unter Verwendung der bekannten Rechenregeln für die Exponentialfunktion $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$ bzw. $(e^x)^y = e^{x \cdot y}$:

- 1) $\ln(A \cdot B) = \ln(A) + \ln(B)$
- 2) $\ln\left(\frac{A}{B}\right) = \ln(A) - \ln(B)$
- 3) $\ln(A^m) = m \cdot \ln(A)$

- b) Zeigen Sie die für einen Basiswechsel des Logarithmus gültige Gleichung

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

12. Zusatzaufgabe: Gebrochen-rationale Funktionen

Bestimmen Sie den Definitionsbereich und die Null- und Polstellen der gebrochen-rationalen Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}$$

und fertigen Sie eine qualitative Skizze des Graphen an.