11. Übungsblatt zum Vorkurs Physik

Sommersemester 2016

`https://lecture.ph1.uni-koeln.de/mod/book/view.php?id=1856&chapterid=82`
`http://www.thp.uni-koeln.de/gross/prepcourse-spring-16.html`

23. Integrale

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

1) $\int_0^1 \sum_{i=0}^{N} a_i x^i dx$ 2) $\int_1^{a^2} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad (a > 0)$ 3) $\int_0^1 x^2 e^x dx$

4) $\int \sin x \cos x dx$ 5) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ 6) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

24. Zusatzaufgabe: Integrationsregeln

Zeigen Sie folgende nützliche Identitäten:

1) $\int_a^b f(\alpha x) dx = \frac{1}{\alpha} \int_{\alpha a}^{\alpha b} f(x) dx$ 2) $\int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = -\frac{1}{f(x)}$ 3) $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x)$

25. Zusatzaufgabe: Substitutionsregel

Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der Substitutionsregel:

1) $\int_0^1 (5x-4)^3 dx$ 2) $\int_1^2 \ln(ax) dx$

3) $\int \sin(2\pi x) dx$ 4) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan(x) dx$

26. Die imaginre Einheit i

a) Vereinfachen Sie mit Hilfe der imaginären Einheit i:

a) $\sqrt{4-7}$ *b)* $\sqrt{-144}$ *c)* $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{-4}}$ *d)* $\sqrt{4(-25)}$

b) Berechnen Sie:

a) i^8 *b)* i^{15} *c)* i^{45} *d)* $(-\mathrm{i})^3$ *e)* i^{-2}

27. Komplexe Zahlen

Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = 3 + 2i$ und $z_2 = 3i - 2$.

a) Geben Sie jeweils den Real- und Imaginärteil an!

b) Stellen Sie die Zahlen in der komplexen Ebene dar!

c) Bestimmen Sie die Beträge und die komplex-konjugierten Zahlen!

d) Berechnen Sie die Summe und das Produkt der beiden Zahlen!

e) Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil von $\frac{z_1}{z_2}$!

28. Komplexe Zahlen II

a) Zeigen Sie, dass Real- und Imaginärteil von $z = x + iy$ wie folgt erhalten werden können:

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + z^*}{2} \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - z^*}{2i} \ .$$

b) Berechnen Sie $(2 + 2i)^2 + (2 - 2i)^2$ und $\frac{(-2+3i)^2}{4-4i}$.

c) Bestimmen Sie für $z = 1 + \sqrt{3}\ i$ die reellen Zahlen a und φ so, dass $z = a\ \exp(i\varphi)$.

d) Finden Sie alle Werte von $\sqrt[5]{-1}$.

e) Nun betrachten wir zwei komplexe Zahlen $z_k = x_k + iy_k$ mit $k = 1, 2$. Zeigen Sie, dass

1. $(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*$,
2. $(z_1/z_2)^* = z_1^*/z_2^*$,
3. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

29. Zusatzaufgabe: Komplexe trigonometrische Funktionen

Die trigonometrische Funktionen können durch die Exponentialfunktion mit komplexen Argumenten dargestellt werden:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{und} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \ .$$

Zeigen Sie mit Hilfe dieser Darstellung, dass:

a) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.

b) $\sin z = -i\sinh(iz)$ bzw. $\cos z = \cosh(iz)$.

c) $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$. (Formel von Moivre)

Finden Sie ausgehend von c) eine Formel für $\cos 2\alpha$ bzw. $\sin 2\alpha$ sowie $\cos 3\alpha$ bzw. $\sin 3\alpha$.