# Quantenmechanik

David Gross, Mateus Araújo

**Übungsblatt 1 Abgabe: 09.04 um 12 Uhr**

## Hinweise zum Übungsbetrieb

- Homepage zur Übung: http://www.thp.uni-koeln.de/gross/qm-summer19.html
- Die *Übungsaufgaben* werden immer Dienstag auf oben genannter Seite zum Download zur Verfügung gestellt. Die *Abgabe der Lösung* erfolgt eine Woche später *bis spätestens Dienstag 12:00* in die Briefkästen vor dem Institut für Theoretische Physik (im Altbau).
- Heften Sie alle Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen und schreiben Sie Ihren Namen, die Nummer Ihrer Übungsgruppe und den Namen des Übungsgruppen-leiters bzw. der Übungsgruppenleiterin auf die erste Seite.
- Bitte geben Sie die Übungen in Dreiergruppen ab. Wir ermuntern Sie ausdrücklich dazu, die Aufgaben in dieser Konstellation zu bearbeiten und über möglichen Lösungswege zu diskutieren.
- Wenn Sie Schwierigkeiten mit dem Stoff haben und etwas nicht verstehen, versuchen Sie, diese Probleme umgehend zu beheben. Anlaufstellen bei Fragen: Literatur, Ihre Kommilitonen/Kommilitoninnen, die Fragestunde Montags nach der Vorlesung, die Übungen, oder die Dozenten.

## 1 Lineare Algebra mit Bra-Ket-Notation

Dies sind Beispielaufgaben für die Tutorien. Es gibt hierfür keine Punkte – aber jeder sollte diese Aufgaben lösen können! Im Folgenden sei $\{|\psi_i\rangle\}_{i=1}^d$ eine Orthonormal-Basis.

**a)** Gegeben ist ein Vektor $|\alpha\rangle = \sum_i c_i |\psi_i\rangle$. Zeigen Sie: $c_{i_0} = \langle\psi_{i_0}|\alpha\rangle$ und $\|\alpha\|_2^2 = \sum_i |c_i|^2$, wobei $\|\cdot\|_2$ der Euklidische Norm bezeichnet.

**b)** Zeigen Sie die *Vollständigkeitsrelation* $\sum_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| = \mathbb{1}$, wobei $\mathbb{1}$ der *Identitätsoperator* ist, der jeden Vektor auf sich selbst abbildet.

**c)** Die *Spur* (engl. *trace*) eines Operators $A$ kann so definiert werden: $\operatorname{tr} A = \sum_i \langle\psi_i|A|\psi_i\rangle$. Zeigen Sie, dass für je zwei Operatoren $A, B$, die Relation $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ gilt. (Hinweis: Schieben Sie die Vollständigkeitsrelation ein...). Folgern Sie: $\operatorname{tr}(ABC) = \operatorname{tr}(BCA)$ (*zyklische Invarianz der Spur*) und $\operatorname{tr}(ABA^{-1}) = \operatorname{tr} B$ für $A$ invertierbar (*Invarianz under Konjugation*). Folgern Sie weiter, dass $\operatorname{tr} A$ gleich die Summe der mit Multiplikativität gezählten Eigenwerte von $A$ ist. (Insbesondere hängt die Spur also nicht von der Basis ab, bezgl. derer wir sie definiert haben).

**d)** Sei $A$ ein Operator. Der adjungierte Operator $A^\dagger$ ist durch die Bedingung $\langle\alpha|A^\dagger|\beta\rangle = \overline{\langle\beta|A|\alpha\rangle}$ definiert. Warum legt diese Relation $A^\dagger$ eindeutig fest? Sei $|\psi\rangle$ ein Eigenvektor von $A$ zum Eigenwert $\lambda$: $A|\alpha\rangle = \lambda|\alpha\rangle$. Zeigen Sie, dass $\langle\alpha|A^\dagger = \bar{\lambda}\langle\alpha|$. Zeigen Sie: Wenn $A$ selbst-adjungiert ist $A = A^\dagger$, dann sind alle Eigenwerte von $A$ reell.

## 2 Unschärferelationen (5 P)

In dieser Übung werden wir eine Unschärferelation beweisen, die zeigt, dass die $x$ und die $z$-Komponente des Spins nicht gleichzeitig scharf definiert sein können. Die Observablen für den Spin in $x$ bzw. $z$-Richtung in der $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$-Basis sind durch die Pauli-Matrizen gegeben:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**a)** **(1 P)** Sei $A$ eine Observable. Die *Varianz* von $A$ im Zustand $|\psi\rangle$ ist gegeben durch

$$\mathrm{Var}_\psi(A) = \langle\psi|A^2|\psi\rangle - \langle\psi|A|\psi\rangle^2.$$

Zeigen Sie, dass $\mathrm{Var}_\psi(A) = 0$, wenn $|\psi\rangle$ ein normiertes Eigenvektor von $A$ ist.

**b)** **(2 P)** Sei $|\psi_\alpha\rangle = \cos(\alpha/2)|\uparrow\rangle + \sin(\alpha/2)|\downarrow\rangle$. Berechnen Sie $\mathrm{Var}_{\psi_\alpha}(\sigma_z)$ (bitte mit Hilfe trigonometrischer Formeln vereinfachen). Für welche Werte von $\alpha \in [0, 2\pi)$ ist $|\psi_\alpha\rangle$ ein Eigenvektor von $\sigma_x$? Wie ist die Varianz von $\sigma_z$ für diese Vektoren?

**c)** **(2 P)** Es sollte nun plausibel sein, dass die Varianz ein Maß für die "Unbestimmtheit" einer Größe ist. Zeigen Sie die *Unschärferelation*

$$\mathrm{Var}_{\psi_\alpha}(\sigma_x) + \mathrm{Var}_{\psi_\alpha}(\sigma_z) = 1.$$

Beschreiben Sie in nicht mehr als zwei Sätzen die Aussage dieser Formel.

## 3 (Bonusaufgabe) Mehr Unschärferelationen (2 P)

Zeigen Sie, dass für einen beliebigen Spin-$\frac{1}{2}$ Zustand $|\phi\rangle = \alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle$, wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, die folgende Unschärferelation gilt:

$$\mathrm{Var}_\phi(\sigma_x) + \mathrm{Var}_\phi(\sigma_y) + \mathrm{Var}_\phi(\sigma_z) = 2.$$

Hier $\sigma_y$ ist die Spin Observable in $y$-Richtung gegeben durch

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$