Quantenmechanik

David Gross, Mateus Araújo

Übungsblatt 13 Abgabe: 09.07 um 12 Uhr

Anmerkungen

- Alle Punkte auf diesen Zettel sind Bonuspunkte. Die Aufgaben sind nicht unbedingt schwieriger als die vorhergehenden - der Stoff wird aber für die Klausur nicht benötigt. Konzeptionell sind die Probleme aber sehr interessant - wir hoffen, dass Euch das auch so geht.
- (von David Gross): Wer kann aus dem Zettel ableiten, wo Mateus promoviert hat? Falls ein Wort nicht bekannt ist $\Rightarrow$ das Internet hilft.

1 Dekohärenz (10 P)

Warum sehen wir eine klassische Welt? Eine Antwort liegt in der *Dekohärenz* – der allgegenwärtigen und (fast) unvermeidlichen Interaktion mit der Umwelt, die Überlagerungen auf makroskopischen Skalen verschwinden läßt. Wir schauen jetzt wie.

Als einfaches, aber trotzdem realistisches Modell dafür betrachten wir ein makroskopisches Staubflankerl mit Ortsfreiheitsgrad $|x\rangle$ das ein Photon in einem kohärenten Zustand $|L\rangle$ streut. Das Staubflankerl bleibt dabei unverändert, während das Photon eine Verschiebung von $D(x\sqrt{2\Lambda})$ spürt, wobei $D(\ell) = e^{\ell(a^\dagger - a)}$ der Verschiebungsoperator von übung **1e** aus Zettel 7 ist. Die Streuung für jeden Ort x ist also durch

$$|x\rangle|L\rangle \mapsto |x\rangle D(x\sqrt{2\Lambda})|L\rangle$$

gegeben.

a) **(1 P)** Zeigen Sie, dass

$$D(\ell_1)D(\ell_2) = D(\ell_1 + \ell_2)$$

b) **(1 P)** Nehmen Sie an, dass am Anfang das Staubflankerl in einer Überlagerung von zwei Orten x_1 und x_2 ist, also mit Quantenzustand

$$|\psi\rangle = \alpha|x_1\rangle + \beta|x_2\rangle.$$

Zeigen Sie, dass nach der Streuung der Staubflankerl-Photon-Zustand

$$|\Psi\rangle = \alpha|x_1\rangle|L + x_1\sqrt{2\Lambda}\rangle + \beta|x_2\rangle|L + x_2\sqrt{2\Lambda}\rangle$$

ist.

Hinweis: $|L\rangle = D(L)|0\rangle$, für Koheränte Zustände $|L\rangle$ und $|0\rangle$.

c) **(2 P)** Die *partielle Spur* über dem zweiten Teil eines beliebigen zweiseitigen Quantenzustands $|\gamma\rangle = \sum_{ij} \alpha_{ij}|\phi_i\rangle|\varphi_j\rangle$ ist definiert als

$$\operatorname{tr}_2(|\gamma\rangle\langle\gamma|) = \operatorname{tr}_2\left(\sum_{ijkl} \alpha_{ij}\bar{\alpha}_{kl}|\phi_i\rangle\langle\phi_k| \otimes |\varphi_l\rangle\langle\varphi_j|\right) = \sum_{ijkl} \alpha_{ij}\bar{\alpha}_{kl}|\phi_i\rangle\langle\phi_k|\langle\varphi_l|\varphi_j\rangle.$$

Um den Dichteoperator des Staubflankerls zu beschreiben, müssen wir die partielle Spur über das Photon machen. Zeigen Sie, dass der Dichteoperator

$$\rho = \operatorname{tr}_2|\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\bar{\beta}e^{-\Lambda(x_1-x_2)^2} \\ \bar{\alpha}\beta e^{-\Lambda(x_1-x_2)^2} & |\beta|^2 \end{pmatrix}$$

ist, wenn in der $\{|x_1\rangle, |x_2\rangle\}$ Basis geschrieben.

Hinweis: Das innere Produkt zwischen zwei Kohärenten Zuständen $|a\rangle$ und $|b\rangle$ ist $\langle a|b\rangle = e^{-\frac{1}{2}(|a|^2+|b|^2-2\bar{a}b)}$. Hier sind zusätzlich Λ, x_1, x_2, L reell.

d) **(2 P)** Der Parameter Λ ist als "Lokalisierungsrate" bekannt, und beschreibt wie stark die Interaktion zwischen Staubflankerl und Photon ist. Was passiert mit den nicht-diagonalen Elementen von ρ wenn die Interaktion schwach ist, das heißt, wenn $\Lambda \approx 0$ ist? Kann man da Interferenz beobachten? Und wenn die Interaktion stark ist, $\Lambda \gg 1/(x_1 - x_2)^2$? Was passiert in diesen zwei Fällen mit der Verschränkung von $|\Psi\rangle$? Nehmen Sie der Einfachheit halber an, dass $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$.

e) **(2 P)** Durch die Streutheorie kann man Λ gut berechnen. Für eine Schwarzkörperstrahlung mit Temperatur T (in Kelvin) die mit einem Staubflankerl mit Durchmesser a (in Zentimeter) interagiert, ist die Lokalisierungsrate (pro Sekunde)

$$\Lambda \approx 5 \times 10^{19} T^9 a^6.$$

Nehmen Sie realistische Werte für a und T im Weltall und in Raumtemperatur an, und berechnen Sie damit die größte Entfernung $|x_1 - x_2|$ bei der Interferenz noch sichtbar ist.

f) **(2 P)** Um das Modell allgemeiner zu machen, nehmen wir nun an, dass das Staubflankerl zu Beginn durch eine beliebige Wellenfunktion $\varphi(x)$ beschrieben ist (statt durch eine Überlagerung von nur zwei Orten). Die Streuung ist in dem Fall

$$\int \mathrm{d}x \varphi(x)|x\rangle|L\rangle \mapsto \int \mathrm{d}x \varphi(x)|x\rangle D(x\sqrt{2\Lambda})|L\rangle$$

und der Dichteoperator des Flankerls ist analog definiert:

$$\begin{aligned}\rho &= \mathrm{tr}_2 \int \mathrm{d}x\, \mathrm{d}x' \varphi(x)\bar{\varphi}(x')|x\rangle\langle x'| \otimes |L + x\sqrt{2\Lambda}\rangle\langle L + x'\sqrt{2\Lambda}| \\ &= \int \mathrm{d}x\, \mathrm{d}x' \varphi(x)\bar{\varphi}(x')|x\rangle\langle x'| \left\langle L + x'\sqrt{2\Lambda} \middle| L + x\sqrt{2\Lambda} \right\rangle.\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass

$$\langle x|\rho|x'\rangle = \varphi(x)\bar{\varphi}(x')e^{-\Lambda(x-x')^2}.$$

Nehmen Sie an, dass $\varphi(x)$ der Schrödingerkatzenzustand für $t = 0$ von Zettel 7 ist. Plotten Sie dies als Funktion von x, x' in 3D mit einem Computer, um den Effekt von Dekohärenz zu illustrieren.