Quantenmechanik

David Gross, Mateus Araújo

Übungsblatt 3 Abgabe: 23.04 um 12 Uhr

1 Unitarität (6 P)

Ein Operator U ist *unitär*, wenn $U^\dagger U = UU^\dagger = \mathbb{1}$ gilt.
In dieser Übung werden wir grundlegende Eigenschaften der Unitarität einführen und zeigen, dass die Menge der quantenmechanischen Zeitentwicklungsoperatoren mit der Menge der unitären Operatoren übereinstimmt.

a) **(0,5 P)** Sei $|\psi\rangle$ ein beliebiger Quantenzustand, wobei $\||\psi\rangle\|_2 = 1$, und U ein beliebiger unitärer Operator. Zeigen Sie, dass
$$\|U|\psi\rangle\|_2 = 1.$$
Das bedeutet, dass unitäre Zeitentwicklung die Normierung erhält.

b) **(0,5 P)** Seien $\{|\psi_i\rangle\}_{i=1}^d$ und $\{|\varphi_i\rangle\}_{i=1}^d$ zwei beliebigen Orthonormalbasen. Zeigen Sie, dass der Operator $U = \sum_{i=1}^d |\psi_i\rangle\langle\varphi_i|$ unitär ist.

c) **(1 P)** Sei
$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$
ein beliebiger unitärer Operator mit dimension $d = 2$, wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$. Finden Sie die Bedingungen, die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ erfüllen mussen, so dass U tatsächlich unitär ist. Finden Sie auch eine Lösung für $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ so dass $|\alpha| = |\gamma|$ (Die Lösung ist nicht eindeutig).

d) **(1,5 P)** Zeigen Sie, dass jedes unitär Operator V als $\sum_i |\gamma_i\rangle\langle i|$ und $\sum_i |i\rangle\langle\delta_i|$ geschrieben werden kann, wobei $\{|i\rangle\}_i$ der Standardbasis ist, und $\{|\gamma_i\rangle\}$ und $\{|\delta_i\rangle\}$ Orthonormalbasen. (Das heißt, die Zeilen und Spalten von jeder unitäre Matrix sind Orthonormalbasen).

e) **(1 P)** Sei $U = \exp(itH)$, wobei $t \in \mathbb{R}$ und $H = H^\dagger$. (U ist also ein Zeitentwicklungsoperator zum Hamiltonian H). Zeigen Sie, dass $U^\dagger = \exp(-itH)$ ist, und dass U unitär ist.

f) **(1,5 P)** Der Spektralsatz sagt, dass wenn ein endlich-dimensionaler Operator M normal ist – das heißt $[M, M^\dagger] = 0$ – dann hat M die Darstellung
$$M = \sum_i \lambda_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|,$$
wobei $\lambda_i \in \mathbb{C}$ und $\{|\psi_i\rangle\}$ eine Orthonormalbasis ist. Zeigen Sie, dass jeder unitärer Operator U normal ist, und dass seine Eigenwerte als $e^{i\theta}$ geschrieben werden können, $\theta \in \mathbb{R}$. Zeigen sie damit, dass jeder unitärer Operator U geschrieben werden kann als $U = \exp(iH)$, wobei H ein selbst-adjungierter Operator ist.

2 Messungen (4 P)

Eine von Neumann-Messung eines Quantenzustands $|\psi\rangle$ der Dimension $d = 2$ mit Ergebnissen $\heartsuit$ und $\spadesuit$ wird beschrieben durch zwei Projektionen $\{\Pi_\heartsuit, \Pi_\spadesuit\}$, so dass $\Pi_\heartsuit + \Pi_\spadesuit = \mathbb{1}$. Das Ereignis $\heartsuit$ tritt mit Wahrscheinlichkeit $p(\heartsuit) = \|\Pi_\heartsuit|\psi\rangle\|_2^2$ ein und hinterlässt das Quantensystem im Zustand $\Pi_\heartsuit|\psi\rangle / \|\Pi_\heartsuit|\psi\rangle\|_2$. Analog tritt das Ereignis $\spadesuit$ mit Wahrscheinlichkeit $p(\spadesuit) = \|\Pi_\spadesuit|\psi\rangle\|_2^2$ ein und hinterlässt das Quantensystem im Zustand $\Pi_\spadesuit|\psi\rangle / \|\Pi_\spadesuit|\psi\rangle\|_2$.

a) **(0,5 P)** Zeigen Sie, dass für jeden Quantenzustand $|\psi\rangle$ der Dimension 2 und Projektionen mit $\Pi_\heartsuit + \Pi_\spadesuit = \mathbb{1}$ folgendes gilt: $p(\heartsuit) \geq 0, p(\spadesuit) \geq 0$ und $p(\heartsuit) + p(\spadesuit) = 1$.

b) **(0,5 P)** Zeigen Sie, dass für jeden zweidimensionale Quantenzustand $|\theta\rangle = \gamma|0\rangle + \delta|1\rangle$ mit $\gamma, \delta \in \mathbb{C}$ und $|\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$, der "ketbra" $|\theta\rangle\langle\theta|$ eine Projektion ist.

Erinnerung: Eine (orthogonale) Projektion ist ein linearer Operator Π, so dass $\Pi^\dagger = \Pi$ und $\Pi^2 = \Pi$.

c) **(1 P)** Sei $\Pi_\heartsuit = |\theta\rangle\langle\theta|$ die Projektion aus Aufgabe **2b**. Finden Sie $\Pi_\spadesuit$, so dass $\{\Pi_\heartsuit, \Pi_\spadesuit\}$ eine von Neumann-Messung ist. Finden Sie einen zweidimensionalen Quantenzustand $|\theta^\perp\rangle$, so dass $\Pi_\spadesuit = |\theta^\perp\rangle\langle\theta^\perp|$ (die Lösung ist nicht eindeutig).

d) **(1 P)** Geben Sie explizit die zwei möglichen Quantenzustände an, die aus der von Neumann-Messung $\{\Pi_\heartsuit, \Pi_\spadesuit\}$ aus Aufgabe **2c** auf einem zweidimensionalen Quantenzustand $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ resultieren. Hierbei sind $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

e) **(1 P)** Im Experiment kann ein Gerät oft nur Messungen in einer festen Basis $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ machen. Die Ergebnisse seien dabei 0, 1 und die Projektionen $\Pi_0 = |0\rangle\langle 0|$ und $\Pi_1 = |1\rangle\langle 1|$. Messungen in anderen Basen werden dadurch realisiert, dass man einen unitären Operator U auf den Zustand anwendet, bevor man ihn in der festen Basis misst. Finden Sie eine Unitäre U, so dass $p(0) = \|\Pi_0 U|\psi\rangle\|_2^2 = \|\Pi_\heartsuit|\psi\rangle\|_2^2$ und $p(1) = \|\Pi_1 U|\psi\rangle\|_2^2 = \|\Pi_\spadesuit|\psi\rangle\|_2^2$ für jede Zustand $|\psi\rangle$ (die Lösung ist nicht eindeutig). Was sind nun die Zustände nach der Messung?