Quantenmechanik

David Gross, Mateus Araújo

Übungsblatt 4 **Abgabe: 30.04 um 12 Uhr**

1 Matrizenmechanik (5 P)

In den alten Zeiten gab es zwei verschiedene Modelle von Quantenmechanik: die Matrizenmechanik, eingeführt 1925 von Heisenberg und Born, und die Wellenmechanik, eingeführt 1926 von Schrödinger. Der Streit hat aber nicht lang gedauert, da bereits 1926 Schrödinger vermutet hat dass die Modelle äquivalent sind, was von Neumann 1929 endgültig bewiesen hat.

In dieser Übung werden wir die Matrizenmechanik entwickeln und die Äquivalenz anschauen.

a) **(0,5 P)** Zeigen Sie, dass der Quantenzustand $|\psi(t)\rangle = e^{-itH/\hbar}|\psi(0)\rangle$ eine Lösung der Schrödingergleichung $i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle$ ist.

b) **(0,5 P)** Zeigen Sie, dass der Erwartungswert einer beliebigen Observablen A mit dem Quantenzustand $|\psi(t)\rangle$ von Aufgabe **1a** gleich ist wie der Erwartungswert der Observablen $A^H = e^{itH/\hbar}Ae^{-itH/\hbar}$ mit dem Quantenzustand $|\psi(0)\rangle$. A^H ist die Observable A im Heisenberg-Bild.

c) **(1,5 P)** Sei $H = -\gamma\hbar\sigma_z$ der Hamiltonoperator von einem Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen in einem homogenen Magnetfeld in z-Richtung. Berechnen Sie σ_x^H, die Observable σ_x im Heisenberg-Bild, und berechnen Sie damit den zeitabhängigen Erwartungswert der Anfangszustände $|\uparrow\rangle$ und $|\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ in dieser Observablen.

Erinnerung: Aufgabe **2a** von Zettel 2 kann hilfreich sein.

d) **(1 P)** Zeigen Sie, dass $[U(t), H] = 0$, wobei $U(t) = e^{-itH/\hbar}$ der Zeitentwicklungsoperator ist, und $[A, B] = AB - BA$ der Kommutator ist. Zeigen Sie damit dass $H^H = H$ ist, das heißt, dass der Hamiltonoperator gleich ausschaut im Heisenberg- und im Schrödinger-Bild.

e) **(1,5 P)** Zeigen Sie, dass die Observable A^H von Aufgabe **1b** eine Lösung der Heisenbergschen Bewegungsgleichung

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A^H = [A^H, H]$$

ist.

2 Fouriertransformation (5 P)

In den nächsten Vorlesungen werden wir sehen, dass die Fouriertransformation eine wichtige Rolle in der Quantenmechanik spielt, z.B. für die Beschreibung von Impulsmessungen. Daher betrachten wir hier einige Eigenschaften der Transformation. Die physikalische Interpretation wird in den nächsten Vorlesungen klar werden.

Im Folgenden ist $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Funktion, die im Unendlichen gegen 0 geht: $\lim_{x\to\infty} \psi(x) = 0$. Die Fouriertransformation ist gegeben durch

$$\mathcal{F}[\psi](k) = \widetilde{\psi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{-ikx}\psi(x)\,,$$

mit inverser Transformation

$$\mathcal{F}^{-1}[\widetilde{\psi}](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, e^{ikx}\widetilde{\psi}(k) = \psi(x).$$

a) (1 P) Zeigen Sie:

$$\psi(x) = \psi^*(x) \iff \widetilde{\psi}^*(k) = \widetilde{\psi}(-k),$$

wobei der Stern komplexe Konjugation bedeutet.

b) (2 P) Wir definieren den Translationsoperator T_a und den Multiplikationsoperator X als:

$$(T_a\psi)(x) = \psi(x-a), \qquad (X\psi)(x) = x\psi(x).$$

Die Ableitung von ψ wird mit ψ' bezeichnet. Zeigen Sie

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[T_a\psi](k) &= e^{-ika}\widetilde{\psi}(k)\,, \\ \mathcal{F}[\psi'](k) &= i(X\widetilde{\psi})(k)\,, \\ \mathcal{F}[X\psi](k) &= i\widetilde{\psi}'(k)\,. \end{aligned}$$

Hinweis: Partielle Integration. Ein Einschieben von $\psi = \mathcal{F}^{-1}[\widetilde{\psi}]$ könnte helfen.

c) (2 P) Sei $\psi(x) = e^{-x^2}$. Das Integral, das $\widetilde{\psi}$ definiert ist schwer direkt zu lösen. Wir gehen daher indirekt vor. Zeigen Sie (mit Hilfe partieller Integration!) die Relation

$$\frac{\partial}{\partial k}\widetilde{\psi}(k) = -\frac{k}{2}\widetilde{\psi}(k).$$

Lösen Sie diese Differentialgleichung. Die Lösung ist bis auf eine Normierungskonstante eindeutig. Diese Konstante muss hier nicht bestimmt werden.