Quantenmechanik

David Gross, Mateus Araújo

Übungsblatt 5 Abgabe: 07.05 um 12 Uhr

1 Der eindimensionale Tunneleffekt (10 P)

Betrachten Sie eine eindimensionale rechteckige Potentialbarriere, das heißt

$$V(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x \leq 0 \\ V_0 & : \quad 0 < x < d \\ 0 & : \quad x \geq d \end{cases} \qquad \text{mit} \;\; V_0 > 0\,.$$

a) **(2 P)** Die Schrödingergleichung lautet

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)\psi(x,t).$$

Wir betrachten den Fall $E < V_0$. Zeigen Sie, dass die Lösungen der Schrödingergleichung durch $\psi(x,t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\varphi(x)$ mit

$$\varphi(x) = \begin{cases} Ae^{iax} + Be^{-iax} & : \quad x \leq 0 \\ Ce^{\alpha x} + De^{-\alpha x} & : \quad 0 < x < d \\ Fe^{iax} + Ge^{-iax} & : \quad x \geq d \end{cases} \qquad \text{mit} \;\; a = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \;\; \alpha = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

gegeben sind.

b) **(2 P)** Nehmen Sie $\varphi(x)$ und $\varphi(x)'$ als stetig an. Zeigen Sie, dass diese Annahme auf das folgende lineare Gleichungssystem führt:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 - \frac{i\alpha}{a} & 1 + \frac{i\alpha}{a} \\ 1 + \frac{i\alpha}{a} & 1 - \frac{i\alpha}{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (1 + \frac{ia}{\alpha})e^{-\alpha d + iad} & (1 - \frac{ia}{\alpha})e^{-\alpha d - iad} \\ (1 - \frac{ia}{\alpha})e^{\alpha d + iad} & (1 + \frac{ia}{\alpha})e^{\alpha d - iad} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}.$$

c) **(2 P)** Wir betrachten nur den Fall $G = 0$. In der Vorlesung werden wir sehen, dass wir dann A als Amplitude eines von $x = -\infty$ einlaufenden Teilchens interpretieren können, und F als Ampltiude eines nach $x = +\infty$ auslaufenden Teilchens. Daher wird $T(E) = \frac{F}{A}$ als *Transmissionsamplitude* bezeichnet. Zeigen Sie für den *Transmissionskoeffizienten*

$$|T(E)|^2 = \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha}{a} - \frac{a}{\alpha}\right)^2\right)\sinh^2 \alpha d}\,.$$

d) **(1 P)** Skizzieren Sie $|T(E)|^2$, am besten mit Hilfe eines Computers. Wählen Sie z.B. $\hbar = 1, m = 1/2, V_0 = 10, d = 1$. Wie verhält sich der Transmissionskoeffizient als Funktion der Energie? (Keine Punkte, aber auch interessant: Zeichen Sie das Verhalten für feste Energie als Funktion der Breite der Barriere d).

e) **(3 P)** Hier sollen die Wellenfunktionen φ visualisiert werden. Nehmen Sie dazu an: $G = 0, F = 1, m = 9.1 \times 10^{-31}$ kg, und $\hbar = 6.63 \times 10^{-34}$ J s. Wählen Sie basierend auf den Resultaten von Übung **1d** Werte für E, V_0, und d, so dass der Tunneleffekt gut sichtbar ist. Diesen Parametern, zusammen mit die Ergebnis von **1b**, bestimmen die Wellenfunktion $\varphi(x)$ vollständig. Skizzieren Sie (am Besten mit Hilfe eines Computers), den Realteil, den Imaginärteil und den Absolutquadrat von $\varphi(x)$. Was ist die physikalische Bedeutung der Tatsache, dass die Frequenz vor- und hinter der Barriere gleich ist, während sich die Ampltiuden unterscheiden?

2 (Bonusaufgabe) Beam mich hoch, Scotty (2 P)

Das Gravitationspotential an der "Oberfläche" von Uranus und Neptun ist ungefähr gleich (https://xkcd.com/681), also können wir dieses System grob mit der rechteckigen Potentialbarriere aus Übung 1 modellieren. Betrachten Sie also einen Raumfahrer, der mit seinem Düsenrucksack während einer Konjunktion zwischen Uranus, Neptun und Sonne von der "Oberfläche" des Uranus mit einer Geschwindigkeit von 20 m/s in Richtung Neptun fliegt. Berechnen Sie unter der Annahme, dass die Masse von Raumfahrer und Düsenrucksack 200 kg ist, E, V_0 und d für diese Situation und damit die Wahrscheinlichkeit, dass der Raumfahrer zum Neptun tunnelt. Die Antwort muss nur in Grossenordnung richtig sein, aber Null ist kein Antwort!