Quantenmechanik

David Gross, Mateus Araújo

Übungsblatt 7 **Abgabe: 21.05 um 12 Uhr**

1 Unser Lieblingskind, der harmonische Oszillator (10 P)

Der Hamiltonoperator des harmonischen Oszillators ist

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m}{2}\omega^2 x^2,$$

und wenn er mit Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $a^\dagger$ und a dargestellet ist, lautet er

$$H = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\mathbb{1}\right),$$

wobei

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{X}{x_0} + i\frac{P}{p_0}\right) \quad \text{und} \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{X}{x_0} - i\frac{P}{p_0}\right)$$

für $x_0 = \sqrt{\hbar/m\omega}$ und $p_0 = \sqrt{\hbar m\omega}$.

Um mit solchen Operatoren zu arbeiten, sind die Vertauschungsrelationen $[a, a^\dagger] = \mathbb{1}$, $[a^\dagger, a^\dagger] = [a, a] = 0$ nützlich, und die Wirkung von a und $a^\dagger$ auf die Eigenzustände von $a^\dagger a$:

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad \text{und} \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle.$$

a) **(1 P)** Die *kohärenten Zustände* $|\alpha\rangle$ sind definiert als Eigenzustände zum Vernichtungsoperator a mit Eigenwert α, d.h. $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$. Ihre Entwicklung nach den Eingenzuständen $|n\rangle$ des harmonischen Oszillators hat die Form

$$|\alpha\rangle = C\sum_{n=0}^{\infty} f_n(\alpha)|n\rangle.$$

Bestimmen Sie die Entwicklungskoeffizienten $f_n(\alpha)$ und den Normierungsfaktor C. Überprüfen Sie, ob die kohärenten Zustände $|\alpha\rangle$ und $|\beta\rangle$ für $\alpha \neq \beta$ orthogonal sind, indem Sie $|\langle\beta|\alpha\rangle|^2$ berechnen.

b) **(1 P)** Zeigen Sie, dass die Zeitentwicklung des kohärenten Zustandes gegeben ist durch

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{1}{2}i\omega t}e^{-\frac{|\alpha_0|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}}e^{-i\omega n t}|n\rangle = e^{-\frac{1}{2}i\omega t}|\alpha(t)\rangle,$$

wobei $|\alpha(t)\rangle$ ein kohärenter Zustand mit Eigenwert $\alpha(t) = \alpha_0 e^{-i\omega t}$ ist.

c) **(2 P)** Berechnen Sie die *zeitabhängigen* Erwartungswerte des Ortes und des Impulses für den Zustand $|\alpha(t)\rangle$. Zeigen Sie damit, dass

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\alpha(t)|P|\alpha(t)\rangle = -\langle\alpha(t)|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}V(X)|\alpha(t)\rangle$$

ist, für $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. Was ist die Aussage von dieser Gleichung?

Hinweis: Berechnen Sie zuerst $a|\alpha(t)\rangle$, und erinneren Sie sich daran, dass $(A|\psi\rangle)^\dagger = \langle\psi|A^\dagger$. Diese Gleichung ist das berühmte Ehrenfestsche Theorem, das in der Vorlesung besprochen wird.

d) (2 P) Berechnen Sie das Unschärfeprodukt $\Delta X \Delta P$ für ein beliebiger kohärenten Zustand $|\alpha\rangle$.

Hinweis: Wenn Sie richtig gerechnet haben, sollten Sie das vielleicht überraschende Ergebnis erhalten, dass das Unschärfeprodukt unabhängig von α ist.

e) (2 P) Betrachten Sie den *ausgelenkten* Grundzustand des harmonischen Oszillators $|0_L\rangle$, der in Ortsraumdarstellung gegeben ist als

$$\langle x|0_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{x_0\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-L}{x_0}\right)^2}.$$

Geben Sie seine Entwicklung in der Basis $|n\rangle$ an und vergleichen Sie dies mit der Ergebnis von Übung **1a**.

Hinweise: Der Zustand $|0_L\rangle$ ist der um L translatierte Zustand $|0\rangle$, d.h. $|0_L\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}LP}|0\rangle$. Drücken Sie P durch $a^\dagger$ und a aus und verwenden Sie die Baker-Campell-Hausdorff-Formel

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]},$$

gültig für beliebige Operatoren A, B, deren Kommutator $[A, B]$ die Beziehung $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$ beachtet.

f) (1,5 P) Da die Zeitentwicklung eines kohärenten Zustandes ein kohärenter Zustand ist, muss $|\alpha(t)\rangle$ die Differentialgleichung

$$a|\alpha(t)\rangle = \alpha(t)|\alpha(t)\rangle$$

erfüllen, und wir können damit seine Ortsraumdarstellung $\langle x|\alpha(t)\rangle$ finden. Lösen Sie dann

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{X}{x_0} + i\frac{P}{p_0}\right)\langle x|\alpha(t)\rangle = \alpha(t)\langle x|\alpha(t)\rangle$$

und normieren Sie die Lösung, um zu finden, dass

$$\langle x|\alpha(t)\rangle = \sqrt[4]{\frac{p_0}{\pi\hbar x_0}} e^{-\frac{x_0 p_0}{\hbar}\Re(\alpha(t))^2} \exp\left(-\frac{p_0}{2x_0\hbar}x^2 + \frac{p_0\alpha(t)\sqrt{2}}{\hbar}x\right)$$

ist, modulo eine unwichtige globale Phase.

g) (0,5 P) Der Quantenzustand

$$|\mathrm{cat}(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1+e^{-2|\alpha(t)|^2})}}\left(|\alpha(t)\rangle + |-\alpha(t)\rangle\right)$$

ist als Schrödingerkatzenzustand bekannt. Skizzieren Sie in 3D das Betragsquadrat von der Ortsraumdarstellung von $|\mathrm{cat}(t)\rangle$ als Funktion von x und t.

2 (Bonusaufgabe) Die Wignerquasiwahrscheinlichkeitsverteilung (2 P)

Die Wignerquasiwahrscheinlichkeitsverteilung ist eine Darstellung von Wellenfunktionen im üblichen $x - p$ Phasenraum. Es ist sehr nützlich, um die Korrespondenz zwischen Quanten- und klassischen Systemen zu studieren. Der Wigner Darstellung von einer Wellenfunktion $\psi(x)$ ist definiert als

$$W(x,p) = \frac{1}{\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y\ \psi^*(x+y)\psi(x-y)e^{2ipy/\hbar}$$

Skizzieren Sie in 3D die Wigner Darstellung von $\langle x|\mathrm{cat}(t)\rangle$ für $t = 0$. **Beachte:** $W(x,p)$ ist immer eine reelle Zahl.