Quantenmechanik

David Gross, Mateus Araújo

Probeklausur

Nützliche Formeln

- Leiteroperatoren des harmonischen Oszillators:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{X}{x_0} + i\frac{P}{p_0}\right), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{X}{x_0} - i\frac{P}{p_0}\right) \quad \text{mit} \quad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}},\ p_0 = \sqrt{\hbar m\omega}.$$

  Wirkung: $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$, $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$.

- Energiekorrekturen in 2. Ordnung Störungstheorie (ohne Entartung):

$$E_n^{(2)} = \lambda^2 \sum_{m\neq n} \frac{|\langle m|V|n\rangle|^2}{E_n - E_m}.$$

- Die Reihenentwicklung des Sinus und des Kosinus sind

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{und} \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

- Die Leiteroperatoren erfüllen die Beziehung

$$L_\pm|l,m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)}|l,m\pm 1\rangle$$

- Die Leiteroperatoren in Kugelkoordinaten

$$L_\pm = \hbar e^{\pm i\varphi}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

1 Erwartungswerte und Wahrscheinlichkeiten

Sei

$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2)|\uparrow\rangle + e^{i\varphi}\sin(\theta/2)|\downarrow\rangle$$

ein beliebiger Quantenzustand. Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle\psi|\sigma_y|\psi\rangle$, die Eigenvektoren von σ_y, und die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse $p(+|\psi)$ und $p(-|\psi)$ für σ_y-Messungen.

2 Schrödingergleichung auf der Bloch-Sphäre

Sei $H = B\,\sigma_y$ der Hamiltonoperator für eine homogenes Magnetfeld parallel zur y-Richtung mit Stärke B. Betrachten Sie ein Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen im Anfangszustand $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\frac{\pi}{8}}|\uparrow\rangle + e^{-i\frac{\pi}{8}}|\downarrow\rangle)$. Lösen Sie die Schrödingergleichung

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi\rangle = H|\psi\rangle$$

für dieses System, um die Zeitentwicklung $|\psi(t)\rangle$ zu berechnen. Berechnen Sie zusätzlich die Erwartungswerte $\langle\psi(t)|\sigma_x|\psi(t)\rangle$, $\langle\psi(t)|\sigma_y|\psi(t)\rangle$, und $\langle\psi(t)|\sigma_z|\psi(t)\rangle$ und damit die Periode des Bloch-Vektors von $|\psi(t)\rangle$.

3 Rechteckige Potentialbarriere

Betrachten Sie eine eindimensionale rechteckige Potentialbarriere:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x \leq 0 \\ V_0 & : \quad 0 < x < d \\ 0 & : \quad x \geq d \end{cases} \qquad \text{mit } V_0 > 0\,.$$

Zeigen Sie, dass für $E > V_0$ die Funktion

$$\varphi(x) = \begin{cases} Ae^{ia_1 x} + Be^{-ia_1 x} & : \quad x \leq 0 \\ Ce^{ia_2 x} + De^{-ia_2 x} & : \quad 0 < x < d \\ Fe^{ia_1 x} + Ge^{-ia_1 x} & : \quad x \geq d \end{cases} \qquad \text{mit } a_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \quad a_2 = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}\,.$$

eine Lösung für die zeitunabhängige Schrödingergleichung ist. Nehmen Sie an, dass $G = 0$ gilt (das heißt, ein Teilchen laufe aus der Richtung $x = -\infty$ ein), und dass $\varphi(x)$ und $\varphi(x)'$ stetig sind. Zeigen Sie damit, dass

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2} e^{id(a_1+a_2)} \left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right) F, \\ C &= \frac{1}{2} e^{id(a_1-a_2)} \left(1 + \frac{a_1}{a_2}\right) F, \\ A + B &= C + D, \\ A - B &= \frac{a_2}{a_1}(C - D). \end{aligned}$$

4 Lineare Störung des harmonischen Oszillators

Betrachten Sie eine lineare Störung des harmonischen Oszillators, wie folgt:

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 X^2 + \lambda X.$$

Berechnen Sie die *erste nichtverschwindende* Korrektur zu den Energieeigenwerten des ungestörten harmonischen Oszillators mit Hilfe von Störungstheorie.

Hinweis: Benutzen Sie die Leiteroperatoren.

5 Kugelflächenfunktionen

Sei

$$Y_{1,1}(\theta, \varphi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{i\varphi}$$

die Kugelflächenfunktion für $l = 1, m = 1$. Berechnen Sie davon ausgehend die Kugelflächenfunktionen $Y_{1,0}(\theta, \varphi)$ und $Y_{1,-1}(\theta, \varphi)$.

Hinweis: Benutzen Sie die Leiteroperatoren.

6 Quantenkorrelationen

Sei

$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow,\uparrow\rangle + |\downarrow,\downarrow\rangle)$$

ein verschränkter Quantenzustand (*nicht* der Singulett-Zustand) und sei

$$S_\alpha = \sin(\alpha)\sigma_x + \cos(\alpha)\sigma_z$$

die übliche Spin-Observable in Richtung α. Zeigen Sie, dass

$$\langle\phi^+|S^1_\alpha S^2_\beta|\phi^+\rangle = \cos(\alpha - \beta),$$

wobei S^1_α und S^2_β die Spin-Observablen des ersten bzw. zweiten Teilchen sind.