# Klassische Mechanik

David Gross, Johan Åberg, Markus Heinrich

**Übungsblatt 11 Abgabe: 11. Januar um 12 Uhr**

Eine Funktion $F = F(\vec{r}, \vec{p})$ auf dem Phasenraum heißt *Erhaltungsgröße* bezüglich einer Hamiltonfunktion $H$, wenn $\{H, F\} = 0$. Eine Menge von Erhaltungsgrößen $\{F_j\}_{j=1,\dots,N}$ sind *unabhängig*, falls folgende Bedingung gilt:

$$\{F_j, F_k\} = 0, \quad j, k = 1, \dots, N.$$

Erhaltungsgrößen eines Systems können dazu benutzt werden, die Bewegungsgleichungen zu vereinfachen. Im Allgemeinen reduzieren $N$ unabhängige Erhaltungsgrößen die Anzahl an Freiheitsgraden von $f$ auf $f - N$. Diese Reduktion kann man konkret durchführen, indem man die Gleichungen $F_j = \text{const}$ benutzt, um Koordinaten zu eliminieren. Ein System heißt *integrabel*, falls es so viele unabhängige Erhaltungsgrößen wie Freiheitsgrade besitzt, d.h. $f = N$. In diesem Fall können die Bewegungsgleichungen dadurch gelöst werden, dass man die Erhaltungssätze $F_j = \text{const}$ integriert.

## 1 Erhaltungsgrößen von zentralsymmetrischen Hamiltonfunktionen

**a)** Betrachten Sie ein Teilchen der Masse $m$ in einem zentralsymmetrischen Potential $V$, mit folgender Hamiltonfunktion:

$$H(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\|\vec{r}\|). \tag{1}$$

*Zeigen Sie, dass der Drehimpuls $\vec{L}$ und $\vec{L}^2$ Erhaltungsgrößen sind.*

**Hinweis:** Erinnern Sie sich an Aufgabe 2b) auf Blatt 10. Für das Potential ist es am Einfachsten direkt die Definition $\{f, g\} = \sum_{n=1}^{N} \left( \frac{\partial f}{\partial p_n} \frac{\partial g}{\partial r_n} - \frac{\partial f}{\partial r_n} \frac{\partial g}{\partial p_n} \right)$ und die Kettenregel zu benutzen. Beachten Sie auch, dass $L_j = \sum_{kl} \epsilon_{jkl} r_k p_l$ gilt.

**(3 Punkte)**

**b)** *Wie viele Erhaltungsgrößen können Sie also aufzählen? Welche davon sind unabhängig? Ist das System integrabel?* Sie können die Beziehung $\{L_j, L_k\} = -\sum_l \epsilon_{jkl} L_l$ ohne Beweis benutzen. **(3 Punkte)**

## 2 Erhaltungsgrößen vereinfachen die Bewegungsgleichungen

Um zu zeigen, wie Erhaltungsgrößen tatsächlich das Problem vereinfachen, wollen wir hier teilweise die Bewegungsgleichungen der Hamiltonfunktion (1) lösen. Die Idee dabei ist, dass wir die Hamiltonfunktion durch die Erhaltungsgrößen ausdrücken.

Wir werden dabei eine Koordinatentransformation in Kugelkoordinaten machen, d.h.

$$\vec{r} = r \begin{bmatrix} \cos\varphi \sin\theta \\ \sin\varphi \sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} \equiv r\hat{r}.$$

Um die Rechnungen zu vereinfachen, können Sie die folgenden Gleichungen benutzen, die sich als nützlich erweisen werden. Die kartesischen und die sphärischen Einheitsvektoren $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ bzw. $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}$ hängen wie folgt zusammen:

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \sin\theta \cos\varphi \hat{x} + \sin\theta \sin\varphi \hat{y} + \cos\theta \hat{z}, \\ \hat{\theta} &= \cos\theta \cos\varphi \hat{x} + \cos\theta \sin\varphi \hat{y} - \sin\theta \hat{z}, \\ \hat{\varphi} &= -\sin\varphi \hat{x} + \cos\varphi \hat{y}. \end{aligned}$$

Weiterhin sind $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}$ orthogonal und erfüllen die Gleichungen

$$\hat{r} \times \hat{\theta} = \hat{\varphi}, \qquad \hat{r} \times \hat{\varphi} = -\hat{\theta}, \qquad \hat{\theta} \times \hat{\varphi} = \hat{r}.$$

**a)** *Schreiben Sie die Hamiltonfunktion (1) in Kugelkoordinaten und bestimmen Sie die kanonischen Impulse als Funktion von $r, \theta, \varphi$ und ihren Ableitungen.*

**Hinweis:** Es ist einfacher $H$ zuerst in die zugehörige Lagrangefunktion zu transformieren, dort den Koordinatenwechsel durchzuführen und danach wieder zurück zu transformieren. Es kann auch nützlich sein zunächst $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\sin\theta\dot{\varphi}\hat{\varphi}$ zu zeigen. Benutzen Sie Aufgabe 2 auf Blatt 9 für die Legendre-Transformationen.

**(4 Punkte)**

**b)** *Transformieren Sie $\vec{L}^2$ in Kugelkoordinaten und drücken Sie es durch $p_\theta$ sowie $p_\varphi$ aus.*

**Hinweis:** Benutzen Sie $\vec{L} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ und $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\sin\theta\dot{\varphi}\hat{\varphi}$ aus a).

**(4 Punkte)**

**c)** *Berechnen Sie $L_3$ in Kugelkoordinaten und drücken Sie es durch $p_\theta$ sowie $p_\varphi$ aus.*

**Hinweis:** Gegeben $\vec{L}$, ausgedrückt in sphärischen Einheitsvektoren, berechnen Sie $L_3 = \hat{z} \cdot \vec{L}$.

**(2 Punkte)**

**d)** *Benutzen Sie die Erhaltungsgrößen um zu zeigen, dass die Hamiltonfunktion in Kugelkoordinaten für konstanten Drehimpuls $\vec{L}^2 = \ell^2$ wie folgt geschrieben werden kann:*

$$\tilde{H}(r, \theta, \varphi, p_r, p_\theta, p_\varphi) = \frac{1}{2m} p_r^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} + V(r). \tag{2}$$

**(2 Punkte)**

**e)** Durch Gleichung (2) haben wir das ursprüngliche Problem auf einen Freiheitsgrad, also die radiale Bewegung, reduziert. Man könnten nun fortfahren und die Lösungen z.B. aus der Energieerhaltung bestimmen. Da wir das schon gemacht haben, verzichten wir hier darauf und schauen uns stattdessen den Hamiltonschen Fluss von (2) im Phasenraum an. Dabei betrachten wir den Spezialfall des Keplerproblems,

$$V(r) = -\frac{k}{r},$$

wobei $k$ eine Konstante ist.

*Benutzen Sie eine Plotsoftware um die Kurven konstanter Energie von (2) zu zeichnen.*

**Hinweis:** Es ist nicht ganz trivial einen Plot zu erstellen, bei dem man die gebundenen Orbits für $E < 0$ gut sieht. Dafür ist es nützlich die dimensionslosen Variablen $\tilde{r}$, $\tilde{p}_r$, und $\tilde{E}$ wie folgt zu definieren: $r = \tilde{r}\frac{\ell}{mk}$, $E = \tilde{E}\frac{k^2 m}{\ell}$, $p_r^2 = \tilde{p}_r^2 \frac{m^2 k^2}{\ell}$. Der Energiesatz wird dann zu $\tilde{E} = \frac{1}{2}\tilde{p}_r^2 + \frac{1}{2\tilde{r}^2} - \frac{1}{\tilde{r}}$. Wenn Sie die Kurven in der Region $0.2 \le \tilde{r} \le 10$, $-1 \le \tilde{p}_r \le 1$ für $\tilde{E} = -0.5$ bis $\tilde{E} = 0.5$ in Schritten von 0.05 plotten, sollten Sie sowohl gebundene als auch ungebundene Orbits sehen.

**(2 Punkte)**

**Bemerkung:** Sie haben sich vielleicht gewundert was mit der Erhaltungsgröße $L_3$ passiert ist und fragen sich nun, ob an unserem Ansatz etwas falsch ist, da diese ja für die Integrabilität notwendig war. $H$ hängt aber nur von $\vec{L}^2$ ab, welches natürlich wiederrum von $L_3$ abhängt. Wenn wir aber tatsächlich die Lösungen anhand der Erhaltungssätze bestimmt hätten, wären die für $L_3$ und $\vec{L}^2$ beide notwendig gewesen.