Klassische Mechanik

David Gross, Johan Åberg, Markus Heinrich

Übungsblatt 13 **Abgabe: 25. Januar um 12 Uhr**

1 Rollender Mühlstein

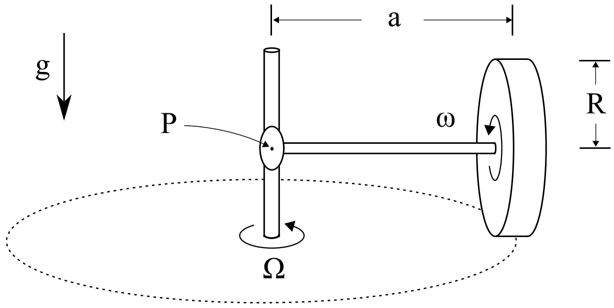

Figure 1: Ein Mühlstein mit Radius R ist mit einer Stange verbunden, die mit Winkelgeschwindigkeit Ω rotiert, und ist daher gezwungen auf einem Kreis mit Radius a zu rollen. Der Mühlstein rollt ohne zu rutschen, was in einer Winkelgeschwindigkeit ω um die Achse des Mühlsteines resultiert.

In einer Mühle rollt ein Mühlstein in Form einer Scheibe auf einer flachen Oberfläche im Kreis, getrieben durch eine rotierende Stange. Offensichtlich trägt das Gewicht des Mühlsteins zu der Kontaktkraft bei, die die Körner zerdrückt. Es ist vielleicht weniger offensichtlich, dass die Kontaktkraft tatsächlich erheblich größer sein kann als die Gewichtskraft des Steines. Hier wollen wir verstehen, wieso das der Fall ist.

Wir nehmen an, dass der Mühlstein die Masse M und Radius R hat (für das Folgende brauchen wir nicht zu wissen, wie dick er ist). Der Mühlstein drehe sich um eine Achse, die mit einem Punkt P an einem vertikalen Stab verbunden ist. Die Länge der Achse vom Punkt P zu dem Schwerpunkt des Steines sei a und wir wollen annehmen, dass wir die Masse der Achse vernachlässigen können. Weiterhin nehmen wir an, dass der Mühlstein rollt ohne zu rutschen. Der Stab rotiere mit einer Winkelgeschwindigkeit Ω und der Mühlstein rotiere um seine eigene Symmetrieachse mit einer Winkelgeschwindigkeit ω.

a) *Was ist die Beziehung zwischen Ω und ω?*

Hinweis: Das folgt aus der Bedingung, dass der Mühlstein rollt ohne zu rutschen.

(1 Punkte)

b) Die Rotation ω entspricht einem Drehimpuls $\vec{L}_{\parallel}$. *Was ist $\vec{L}_{\parallel}$ und wie hängt dieser von der Zeit ab?*

Hinweis: Was ist der Winkelgeschwindigkeitsvektor $\vec{\omega}$, der die Rotation des Mühlsteins um seine Symmetrieachse beschreibt und wie hängt er von der Zeit ab? Was folgt daher für den Drehimpuls?

Bemerkung: $\vec{L}_{\parallel}$ ist nicht der gesamte Drehimpuls des Systems. Bezüglich des Punkts P existiert ebenfalls eine vertikale Komponente durch Ω. Zum Glück müssen wir diese hier nicht berücksichtigen (es wäre deutlich schwerer geworden!).

(3 Punkte)

c) *Welches Drehmoment (bzgl. P) wird benötigt um die Änderung des Drehimpulses aus b) zu bewirken?*

(2 Punkte)

d) Die einzigen Kräfte, die für das Drehmoment aus c) verantwortlich sein können, sind die Gravitationskraft und die Normalkraft des Untergrunds, die auf das Rad wirkt. *Wie groß muss die Normalkraft sein, um das korrekte Drehmoment zu induzieren? Für welchen Wert von Ω ist die Normalkraft doppelt so groß wie jene für einen ruhenden Mühlstein?*

(2 Punkte)

2 Trägheitstensor für Objekt Å

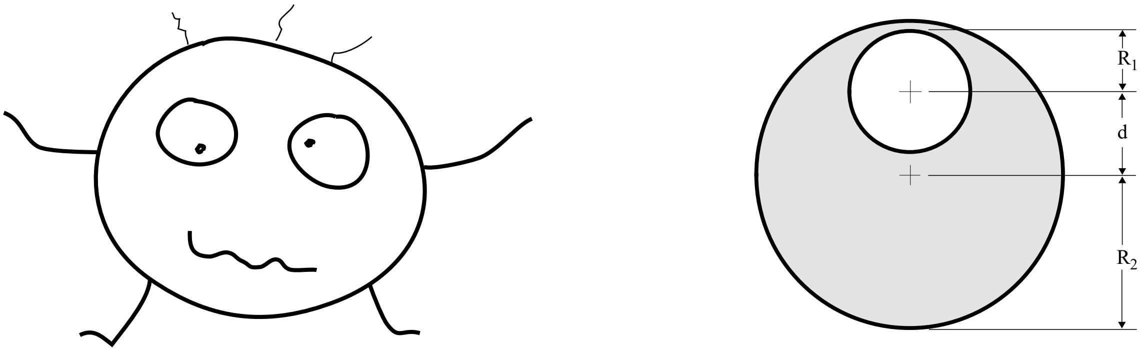

Figure 2: Links sehen wir eine realistische Darstellung des Objektes Å. Dieser Körper hat Masse M und kann recht gut durch eine Kugel mit Radius R_2 und gleichförmiger Massendichte beschrieben werden, in der sich ein kugelförmiger Hohlraum (in der Nähe des Kopfes) befindet. Dieser Hohlraum habe den Radius R_1 und seine Mitte sei um eine Strecke d von der Mitte der großen Kugel verschoben. Es gilt $R_2 \geq R_1 + d$, d.h. der Hohlraum liegt innerhalb der großen Kugel.

a) *Wie sind die Hauptachsen des Objekts Å orientiert?* **(1 Punkte)**

b) *Bestimmen Sie den Trägheitstensor bzgl. des Koordinatensystems, dessen Ursprung im Zentrum der großen Kugel sitzt und dessen Achsen parallel zu den Hauptachsen sind.*

(4 Punkte)

3 Tennisschlägertheorem

Ein asymmetrischer Kreisel ist ein starrer Körper, bei dem alle Hauptträgheitsmomente verschieden sind $I_1 > I_2 > I_3 > 0$[1]. Ein Kreisel heißt frei, falls keinerlei Drehmomente auf ihn wirken. Das bedeutet, dass sich die Euler-Gleichungen in einem körperfesten Koordinatensystem[2], dessen Achsen mit den Hauptachsen zusammen fallen, wie folgt vereinfachen:

$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_3\omega_2 &= 0, \\ I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 &= 0, \\ I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_2\omega_1 &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

hierbei sind ω_1, ω_2 und ω_3 die Komponenten des Winkelgeschwindigkeitsvektors im körperfesten Hauptachsensystem.

[1] Ein Tennisschläger hat typischerweise drei verschiedene Hauptträgheitsmomente.

[2] Körperfest heißt, dass das Koordinatensystem der Bewegung des Körpers folgt. Man sollte sich aber merken, dass dies im Allgemeinen kein Inertialsystem ist.

a) Stellen Sie sich vor, dass die Rotation zu anfangs fast perfekt um die 1-Achse erfolgt, d.h. $\omega_1 \gg \omega_2$ and $\omega_1 \gg \omega_3$. Wir können daher $\omega_3\omega_2 \approx 0$ in der ersten Zeile von (1) nähern. *Lösen Sie* (1) *in dieser Näherung.*

Finden Sie analoge Näherungslösungen für die Fälle $\omega_2 \gg \omega_1$, $\omega_2 \gg \omega_3$ *und* $\omega_3 \gg \omega_1$, $\omega_3 \gg \omega_2$. **(5 Punkte)**

b) *Was bedeuten die Ergebnisse aus a) und b) für die Stabilität der Rotationen um die drei Hauptachsen des asymmetrischen Kreisels?* **(2 Punkte)**