# Klassische Mechanik

David Gross, Johan Åberg, Markus Heinrich

**Übungsblatt 5 Abgabe: 16. November um 12 Uhr**

## 1 A not so pointless and not so challenging challenge

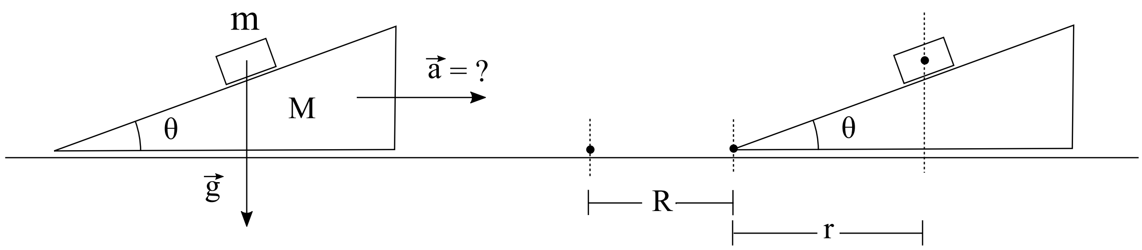


**Figure 1:** Ein Keil der Masse $M$ könne reibungslos auf einer horizontalen Fläche gleiten. Auf dem Keil befinde sich ein Block der Masse $m$, der reibungslos auf dem Keil gleiten könne. Auf den Block wirkt die Gravitationskraft. Die Koordinate $r$ sei der horizontale Abstand von der Kante des Keiles zum Schwerpunkt des Blockes und $R$ sei der Abstand von der Kante des Keiles zu einem Referenzpunkt auf der Ebene.

Ein Keil könne reibungslos auf dem Boden gleiten und auf dem Keil befinde sich ein Block, der ebenfalls reibungslos gleiten könne. Stellen Sie sich vor, Sie hielten beide in Ruhe und ließen diese dann plötzlich los.[1]

**a)** *Leiten Sie die Lagrangefunktion für den Keil und Block her, ausgedrückt in den in Abb. 1 beschriebenen Koordinaten $r$ und $R$.*[2] **(3 Punkte)**

**b)** *Gibt es zyklische Koordinaten? Fall dem so ist, mit welchen Erhaltungsgrößen stehen diese in Verbindung? Können Sie mittels Kräften erklären, warum diese erhalten sind?* **(2 Punkte)**

**c)** *Benutzen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen um die Beschleunigung des Keiles zu berechnen.* **(3 Punkte)**

[1] Sie fragen sich jetzt vielleicht, ob das nicht die gleich Aufgabe wie die "pointless challenge" ist? Sie liegen richtig! Bevor Sie nun panisch in Richtung des nächsten Notausganges fliehen, sollten Sie bedenken, dass Sie inzwischen besser für diese Aufgabe gerüstet sind. Diese ist viel einfacher im Lagrange-Formalismus zu lösen als mit Newtonschen Methoden.

[2] Das Schöne an der Lagrange-Methode ist, dass man Sie in jeglichen Koordinaten benutzen kann. Wir sollten uns nichtsdestotrotz auf eine Wahl einigen, schon alleine damit die armen Tutoren nicht in Tränen ausbrechen (die müssen nämliche für jede Wahl von Koordinaten die Herleitung überprüfen).

## 2 Fröhlichkeit optimieren


**Figure 2:** Die Studenten Anna und Bernd huldigen den regionalen Traditionen.

Die Studenten Anna und Bernd beteiligen sich eifrig an den Kölner Traditionen und wollen sicher stellen, dass sie ihren Grad an Fröhlichkeit am kommenden 11. November maximieren. Sie besuchen derzeit eine Vorlesung zur klassischen Mechanik und haben gerade den Lagrange-Formalismus kennen gelernt. Sie wissen daher, dass man die Bewegungsgleichungen eines physikalischen Systems dadurch erhalten kann, dass man die stationären Lösungen des Funktionals $\mathcal{S}[x] = \int_{t_i}^{t_f} L(x, \dot{x}, t)dt$ sucht. Sie wissen auch, dass man diese bekommt, in dem man die Euler-Lagrange-Gleichungen für die Lagrangefunktion $L$ löst[3]. Schlau wie sie sind, merken sie schnell, dass man diese Methode benutzen kann um alles Mögliche zu optimieren und beschließen daher den 11.11. mit wissenschaftlicher Präzision zu feiern.

Anna und Bernd sind überzeugt, dass ihr Grad an Fröhlichkeit zu gegebener Zeit $t$ in etwa proportional zur bis dahin konsumierten Menge $x(t)$ an diversen flüssigen Erfrischungen ist (von $t_i =$ 11:11 an gerechnet). Dennoch sind sie sich einig, dass eine zu schnelle Aufnahme des Genannten zu unschönen und unangenehmen Nebenwirkungen führen würde und dass eine Aufnahmerate $\dot{x}$ um $\alpha > 0$ am angenehmsten wäre. Nach zahlreichen Experimenten einigen sie sich darauf, dass der folgende Ausdruck eine gute Näherung für ihren Grad an Fröhlichkeit zu einem gegeben Zeitpunkt ist[4]

$$L_{\text{Fröhlichkeit}}(x, \dot{x}) = x\dot{x}(2\alpha - \dot{x}).$$

Sie wollen daher eine Funktion $x(t)$ finden, die ihre akkumulierte Fröhlichkeit im Zeitraum von $t_i =$ 11:11 bis $t_f =$ ziemlich spät maximiert. Mit anderen Worten wollen Sie das Fröhlichkeitsfunktional

$$\mathcal{S}_{\text{Fröhlichkeit}}[x] = \int_{t_i=11:11}^{t_f=\text{ziemlich spät}} L_{\text{Fröhlichkeit}}(x, \dot{x})dt \tag{1}$$

optimieren. Die Lösung $x(t)$ muss einige Randbedingungen erfüllen: Sie wollen nicht vor $t_i =$ 11:11 anfangen zu trinken, daher $x(t_i) = 0$. Weiterhin haben sie beschlossen nicht mehr als die Menge $Q$ insgesamt zu trinken (z. B. aus Budgetgründen), also $x(t_f) = Q$.

**a)** Bevor wir uns um Anna und Bernds wirklich wichtiges Problem kümmern, wollen wir zunächst eine allgemeine Beobachtung machen. Nehmen Sie an, dass wir eine Funktion $L(x, \dot{x}, t)$

[3] Bitte haben Sie keine Angst vor dem Funktional! Sie müssen tatsächlich nur die Euler-Lagrange-Gleichungen lösen.

[4] Man kann durchaus den Realismus dieses Modells anzweifeln, doch wer sind wir, dass wir Anna und Bernds Wahrnehmung von Fröhlichkeit beurteilen könnten?

gegeben haben und lassen Sie uns damit eine neue Funktion definieren[5]:

$$H(x, \dot{x}, t) = \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L(x, \dot{x}, t).$$

Nehmen Sie an, dass $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$. *Zeigen Sie damit, dass* $\frac{dH}{dt} = 0$ *folgt, falls* $x(t)$ *eine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichungen bezüglich* $L$ *ist. Zeigen Sie mit anderen Worten, dass für jede Lösung* $x(t)$ *eine Konstante* $C$ *existiert, so dass* $H(x(t), \dot{x}(t), t) = C$ *gilt.*

**Hinweis:** Beachten Sie den Unterschied zwischen der partiellen Ableitung $\frac{\partial L}{\partial t}$ und der totalen Ableitung $\frac{dL}{dt}$. Die Funktion $L$ hängt nicht nur von $t$ ab, sondern auch von $x$ und $\dot{x}$, die wiederum selbst von $t$ abhängen. Wenn wir $\frac{\partial L}{\partial t}$ schreiben, differenzieren wir nur die *explizite* Abhängigkeit von $t$ in $L(x, \dot{x}, t)$ und halten $x$ und $\dot{x}$ fest. Wenn wir hingegen $\frac{dL}{dt}$ schreiben, meinen wir die vollständige Ableitung nach $t$, also die Ableitung der Funktion $L(x(t), \dot{x}(t), t)$. Benutzen Sie die Kettenregel, um die totale Ableitung $\frac{dL}{dt}$ umzuformulieren. **(3 Punkte)**

**b)** Die Beobachtung in a) kann manchmal dazu benutzt werden, die Bewegungsgleichungen zu lösen. Die Euler-Lagrange-Gleichungen sind typischerweise Differentialgleichungen zweiter Ordnung in $t$, während die Gleichung $H = C$ eine Differentialgleichung erster Ordnung und daher häufig einfacher zu lösen ist. *Lösen Sie diese Gleichung um eine stationäre Lösung von Gl. (1) zu finden.*[6] In der Rechnung müssen Sie mehrfach Wurzeln ziehen. Sie dürfen dabei das Vorzeichen von Konstanten und den Wurzeln so wählen, dass Sie eine reelle positive Lösung bekommen.[7] **(4 Punkte)**

**c)** *Leiten Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für* $L_{\text{Fröhlichkeit}}$ *her und überprüfen Sie, dass Ihre Lösung aus b) diese tatsächlich löst.* **(3 Punkte)**

**d)** Als Anna und Bernd die Lösung $x(t)$ der Euler-Lagrange-Gleichung herleiten, stellen sie fest, dass diese nicht von $\alpha$ abhängt. Das verwirrt sie ein bisschen, also setzen sie diese in $\mathcal{S}_{\text{Fröhlichkeit}}$ ein (was von $\alpha$ abhängt). Zu ihrem Schreck finden sie heraus, dass das Funktional für bestimmte Werte von $\alpha$, $\Delta t = t_f - t_i$ und $Q$ negativ werden kann.[8] *Drücken Sie* $\mathcal{S}_{\textit{Fröhlichkeit}}[x]$ *durch* $\alpha$, $\Delta t$ *und* $Q$ *aus. Was ist der maximale Wert* $\mathcal{S}^* = \max_{Q \geq 0} \mathcal{S}_{\textit{Fröhlichkeit}}[x]$ *für festes* $\alpha$ *und* $\Delta t$ *und für welchen Wert* $Q^*$ *wird dieser angenommen?*

Vergleichen wir nun die optimale Lösung damit konstant mit der Wohlfühlrate $\alpha$ zu trinken, d.h. $x_{\text{Komfort}}(t) = \alpha(t - t_i)$. *Wie verhält sich* $Q^*$ *zu der Gesamtmenge für* $x_{\text{Komfort}}$*? Berechnen Sie auch* $\mathcal{S}^* / \mathcal{S}_{\textit{Fröhlichkeit}}[x_{\text{Komfort}}]$.[9] **(2 Punkte)**

**e)** Diese Aufgabe gibt keine Punkte, aber einen goldenen Stern! Es ist eine gute Übung um den Umgang mit partiellen und totalen Ableitungen zu üben.

Dass die Lösung der Euler-Lagrange-Gleichungen bzgl. $L_{\text{Fröhlichkeit}}$ nicht von $\alpha$ abhängt, ist kein Zufall. Um dies zu zeigen, beweisen wir eine allgemeinere Aussage. Gegeben $L(x, \dot{x}, t)$ und eine beliebige Funktion $f(x, t)$ definieren wir eine neue Funktion $\tilde{L}(x, \dot{x}, t) = L(x, \dot{x}, t) + \frac{d}{dt} f(x, t)$. *Zeigen Sie, dass* $x(t)$ *genau dann Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung bzgl.* $L$ *ist, wenn*

[5] Diese Art von Funktion wird später eine wichtige Rolle in der Vorlesung spielen.

[6] Anna und Bernd wollen natürlich das Maximum finden. Leider ist es häufig recht schwierig zu zeigen, dass eine stationäre Lösung ein Minimum oder Maximum ist. Damit muss man oft einfach leben.

[7] Was auch immer $x(t) < 0$ oder $\dot{x}(t) < 0$ bedeuten, es wäre sicherlich nicht sonderlich angenehm, so dass wir da mal lieber nicht drüber nachdenken.

[8] Das ist eigentlich nicht so seltsam. Der Randbedingung $x(t_f) = Q$ zufolge, müssen Sie die Menge $Q$ in der Zeit $\Delta t$ trinken. Wird also $Q$ sehr große oder $\Delta t$ sehr klein, sollten sie ihre Wohlfühltrinkgeschwindigkeit $\alpha$ weit überschreiten und $L$ wird negativ.

[9] Hmmm ... ich stelle gerade fest, dass die Moral dieser Geschichte etwas fragwürdig ist. Ich hatte gehofft, dass dabei etwas über die Tugend des gemäßigten Trinkens herauskommt. Naja, scheiße gelaufen, es ist Karneval!

*$x(t)$ Lösung derer bzgl. $\tilde{L}$ ist*[10] *(Sie können annehmen, dass $f$ hinreichend differenzierbar ist, so dass wir die Reihenfolge von Ableitungen vertauschen können). Zeigen Sie als Nächstes, dass man eine neue Funktion $\tilde{L}_{Fröhlichkeit} = L_{Fröhlichkeit} + \frac{df}{dt}$ finden kann, die nicht von $\alpha$ abhängt.* Wir können daher folgern, dass auch die Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung bzgl. $L_{\text{Fröhlichkeit}}$ nicht von $\alpha$ abhängen sollte.

**(0 Punkte, aber einen goldenen Stern!)**

[10] Falls Sie das verwirrt, können Sie auch die einfachere Version beweisen, bei der $f$ nur von $x$ abhängt (das reicht uns schon). Beachten Sie, dass es auch einen recht schnellen Lösungsweg über das Funktional $\mathcal{S}$ anstatt der Euler-Lagrange-Gleichungen gibt.