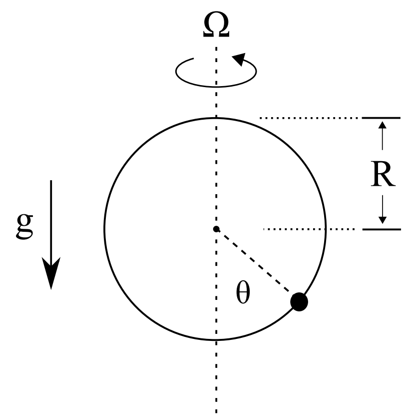
Klassische Mechanik

David Gross, Johan Åberg, Markus Heinrich

Übungsblatt 6 **Abgabe: 23. November um 12 Uhr**

1 Perle auf einem rotierenden Ring



Eine Perle der Masse m gleite ohne Reibung auf einem Ring des Radiuses R, der um seine vertikale Achse mit eine konstanten Winkelgeschwindigkeit Ω rotiere.

a) *Leiten Sie die Lagrangefunktion als Funktion des Winkels θ her, den die Verbindungslinie zwischen dem Mittelpunkt des Ringes und der Perle mit der vertikalen Achse einschließt.* **(2 Punkte)**

b) Die so erhaltene Lagrangefunktion ist äquivalent zu der eines Teilchens der Masse M, das sich auf der reellen Achse unter Einfluss eines (periodischen) Potentials $V(\theta)$ bewegt. *Bestimmen Sie M und $V(\theta)$.* **(1 Punkte)**

c) *Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung der Perle.* **(2 Punkte)**

d) Die Gleichgewichtskonfigurationen der Perle hängen von der Winkelgeschwindigkeit Ω ab. *Berechnen Sie diese als Funktion von Ω und zeigen Sie, ob diese stabil oder instabil sind.*

Hinweis: Abhängig von Ω ergeben sich verschiedene Fälle. **(4 Punkte)**

2 Pendel an einem bewegbaren Aufhängepunkt

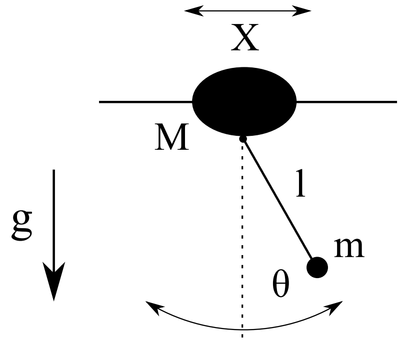
Ein Objekt der Masse M könne ohne Reibung auf einer horizontalen Schiene gleiten. An diesem hänge eine masselose Stange der Länge l, an der am Ende eine Masse m befestigt sei. Das Pendel könne (ohne Reibung) in der von der Schiene und der vertikalen Richtung aufgespannten Ebene schwingen.

a) *Leiten Sie die Lagrangefunktion als Funktion der Position X der Masse M und des Winkels θ her.*

(3 Punkte)

b) *Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen.* **(3 Punkte)**

c) *Benutzen Sie die Kleinwinkelnäherung um eine Näherung für diese Gleichungen zu finden.* Genauer nehmen wir an, dass θ so klein ist, dass wir näherungsweise $\sin\theta \approx \theta$ und $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$



schreiben können und dass wir in der resultierenden Gleichung nur Terme erster Ordnung in θ, $\dot{\theta}$ und $\ddot{\theta}$ mitnehmen müssen (z.B. sind θ^2 und $\theta\dot{\theta}$ Terme zweiter Ordnung, während $\theta\dot{\theta}^2$ dritte Ordnung ist). **(2 Punkte)**

d) *Finden Sie eine vollständige Lösung der genäherten Gleichungen aus c). Was sind die Normalmoden und die entsprechenden Frequenzen?* **(3 Punkte)**

3 Verallgemeinerte Euler-Lagrange-Gleichungen

Diese Aufgabe gibt keine Punkte, aber einen goldenen Stern. Wenn Sie sich unsicher im Bezug auf die Herleitung der Euler-Lagrange-Gleichung sind, so ist dies die richtige Aufgabe für Sie!

Betrachten Sie das Funktional

$$\mathcal{S}[x] = \int_{t_i}^{t_f} f(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) dt,$$

d.h. verglichen mit dem Standardfall haben wir hier eine zusätzliche Abhängigkeit von $\ddot{x}$.

Zeigen Sie, dass $x(t)$ genau dann ein stationärer Punkt von $\mathcal{S}[x]$ ist, falls er folgende Gleichung löst:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \ddot{x}}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right) + \frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

Zusätzlich muss $x(t)$ bestimmte Randbedingungen erfüllen. Welche sind das?

Hinweis: Die übliche E-L Gleichung erhalten wir, indem wir als Randbedingung fordern, dass $x(t_i)$ und $x(t_f)$ konstant sind. Wie kann das nun verallgemeinert werden? Schlagen Sie nochmal die Herleitung der Euler-Lagrange-Gleichungen nach und versuchen Sie diese zu verallgemeinern.

(0 Punkte, aber einen goldenen Stern!)