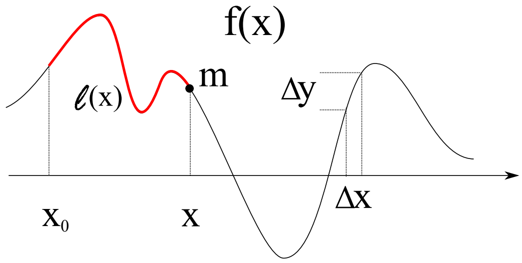
Klassische Mechanik

David Gross, Johan Åberg, Markus Heinrich

Übungsblatt 7 **Abgabe: 23. November um 12 Uhr**

1 Koordinatenwechsel für die eingeschränkte Bewegung eines Teilchens

Stellen Sie sich ein Teilchen vor, das sich nur auf einer Kurve (x, y) mit $y = f(x)$[1] bewegen kann. Ansonsten soll kein Potential auf das Teilchen wirken.



a) *Was ist die Lagrangefunktion des Systems als Funktion der Koordinate x?* **(1 Punkte)**

b) *Leiten Sie die Euler-Lagrange-Gleichung her.* **(2 Punkte)**

c) *Finden Sie einen allgemeinen Ausdruck for die Länge $\ell(x)$ der Kurve zwischen den Punkten $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$ wobei x_0 ein beliebiger fester Referenzpunkt sei.*

Hinweis: Die Antwort ist ein Integral. Betrachten Sie das Intervall $[x, x + \Delta x]$ für kleines Δx. Was ist ungefähr die Größe des zugehörigen Δy? Wie lang ist dann in etwa die Linie, die (x, y) und $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ verbindet? **(2 Punkte)**

d) *Führen Sie als neue Koordinate die Bogenlänge ℓ ein und drücken Sie die Lagrangefunktion durch diese aus. Was ist nun die Euler-Lagrange-Gleichung? Finden Sie eine allgemeine Lösung.* **(2 Punkte)**

2 Scheinkräfte

Wir können die Lagrangefunktion in beliebigen Koordinaten ausdrücken, sogar in solchen, die von der Zeit abhängen und somit keinem Inertialsystem entsprechen. Das Ergebnis ist stets eine gültige Lagrangefunktion des Systems. Betrachten Sie ein freies Punktteilchen der Masse m. In einem kartesischen Inertialsystem mit Koordinaten (x, y, z) hat dieses eine sehr einfache Lagrangefunktion $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$. Wir wollen diese nun in einem Koordinatensystem (x', y', z') ausdrücken, das mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse rotiert. In anderen Worten:

$$
\begin{aligned}
x' &= x\cos(\omega t) + y\sin(\omega t), \\
y' &= -x\sin(\omega t) + y\cos(\omega t), \\
z' &= z,
\end{aligned}
\qquad \Leftrightarrow \qquad
\begin{aligned}
x &= x'\cos(\omega t) - y'\sin(\omega t), \\
y &= x'\sin(\omega t) + y'\cos(\omega t), \\
z &= z'.
\end{aligned}
$$

a) *Bestimmen Sie die Lagrangefunktion und die Euler-Lagrange-Gleichung in den neuen Koordinaten (x', y', z').*

(2 Punkte)

[1] f sei eine glatte Funktion.

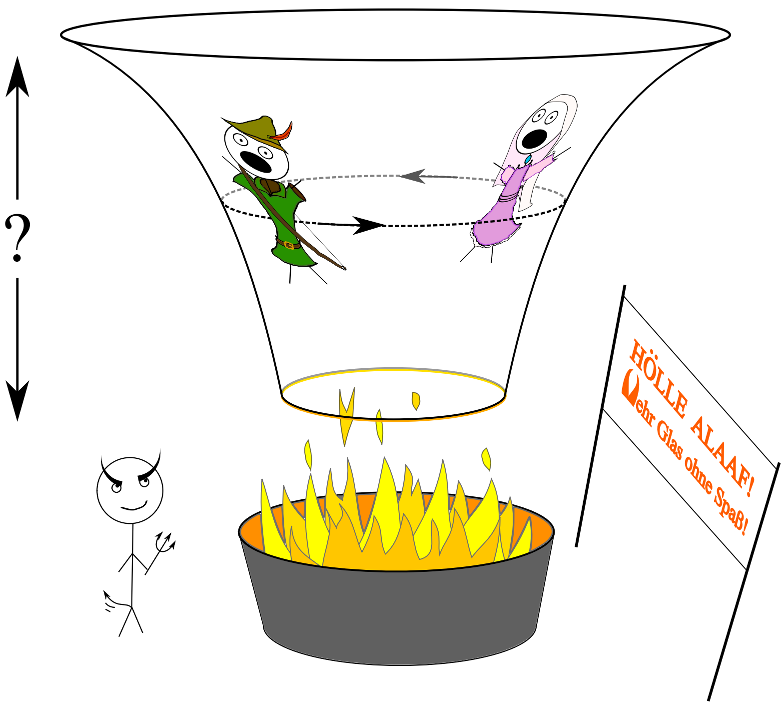
b) Es sei $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$ und $\vec{r}' = (x', y', z')$. *Zeigen Sie, dass die Euler-Lagrange-Gleichung aus a) wie folgt geschrieben werden kann:*

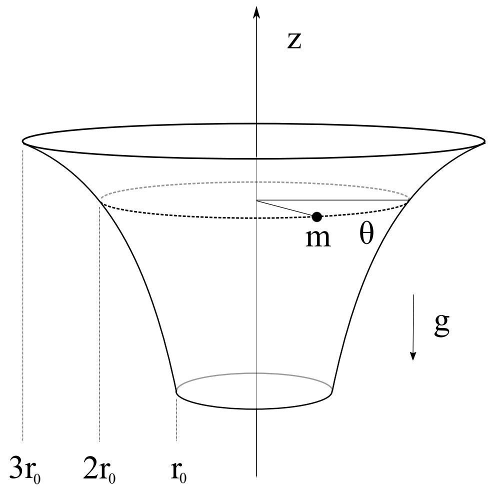
$$m\ddot{\vec{r}}' = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}'.$$

(1 Punkte)

Beachten Sie, dass $\vec{F}_Z = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$ und $\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}'$ nichts anderes als die auf das Teilchen wirkende Zentrifugal- und Corioliskraft darstellen. Dies sind also Scheinkräfte, die aus Sicht des Nichtinertialsystems (x', y', z') auf das Teilchen wirken.

3 Ein ausgleichend belehrende Erzählung (nur um sicherzugehen, dass mich keiner für das Fördern von Ausschweifungen verklagt)





Anna und Bernd haben sehr gewissenhaft ihre Fröhlichkeit optimiert (siehe Aufgabe 5.2). Vielleicht ein bisschen zu gewissenhaft, denn sie sind dabei ohnmächtig geworden und durchleben nun volltrunken einen Albtraum[2] In diesem sind sie auf einer zweidimensionalen trichterförmigen Oberfläche gefangen. Wenn Sie zum oberen Ende rutschen, dann entkommen sie ihrem Albtraum, während sie am unteren Ende ihr Studienfreund 'Luci'[3] sehnsüchtig erwartet um ihnen einen warmen Empfang zu bereiten.

Wir betrachen Anna und Bernd als Punktteilchen der Masse m, die reibungslos auf einer Oberfläche gleiten können. Diese erhält man dadurch, dass man die Kurve $z = -\frac{\alpha}{2r^2}$ mit $r_0 \leq r \leq 3r_0$ um die z-Achse rotieren lässt, wobei $\alpha > 0$ und $r_0 > 0$. Die Masse m unterliege einer konstanten Gravitationsbeschleunigung g, die in die negative z-Richtung zeigt. Wir wollen nun herausfinden, ob Anna und Bernd irgendwann r_0 (und ihren Freund Luci) erreichen, ob sie es bis $3r_0$ schaffen (und damit ihrem Albtraum entkommen) oder ob sie für alle Ewigkeit in dem Bereich $r_0 < r < 3r_0$ gefangen sind.

[2] Aufgepasst Kinder! Das passiert, wenn Ihr Euch exzessivem Trinken hingebt!

[3] Anna und Bernd kennen ihn nicht wirklich, aber jeder nennt ihn 'Luci' und er ist ein Austauschstudent aus irgendeinem Ort mit einem ziemlich heißen Klima. Er studiert den interdisziplinären Physik-Diktator Master-Studiengang in Köln (Teil des SFB 666) und kann da wohl ziemlich glänzen.

a) *Bestimmen Sie die Lagrangefunktion der Masse m als Funktion der Koordinaten r and θ.* **(2 Punkte)**

b) *Benutzen Sie die Energieerhaltung um eine Differentialgleichung erster Ordnung in r aufzustellen (die also nur r und $\dot{r}$, aber nicht höhere Ableitungen enthält).* **(2 Punkte)**

Hinweis: Man könnte stattdessen auch die Euler-Lagrange-Gleichung herleiten, aber es ist einfacher direkt die Energieerhaltung zu benutzen. Benutzen Sie die Zyklizität um $\dot{\theta}$ aus der Gleichung zu eliminieren. **(2 Punkte)**

c) Wir nehmen an, dass die Bewegung der Masse m bei $r(0) = 2r_0$ und unter einem Winkel $\theta(0) = \theta_0$ mit folgender Winkelgeschwindigkeit beginnt:

$$\dot{\theta}(0) = \frac{\sqrt{g\alpha}}{4r_0^2}.$$

Zeigen Sie, dass sich die Differentialgleichung aus b) für diese Anfangsbedingungen zu folgender Gleichung vereinfacht:

$$\frac{m}{2}(1 + \frac{\alpha^2}{r^6})\dot{r}^2 = E. \tag{1}$$

(2 Punkte)

d) *Bestimmen Sie für die Anfangsbedingungen aus c) das Schicksal von Anna und Bernd für all möglichen Anfangswerte der Radialgeschwindigkeit $\dot{r}$.*

Hinweis: Die Gleichung (1) ist separabel und kann prinzipiell integriert werden. Es kann aber recht schwer sein die auftretenden Integral explizit zu lösen. Wir sind allerdings auch nicht wirklich an der exakten Lösung interessiert, sondern nur an Anna und Bernds allgemeines Schicksal. Man könnte als Trick versuchen von r zu einer neuen Koordinate zu wechseln, für die diese Frage leichter zu beantworten ist. Vielleicht könnte irgendwas im Zusammenhang mit der Bogenlänge hilfreich sein. **(2 Punkte)**