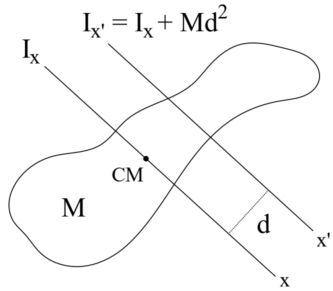
Klassische Mechanik

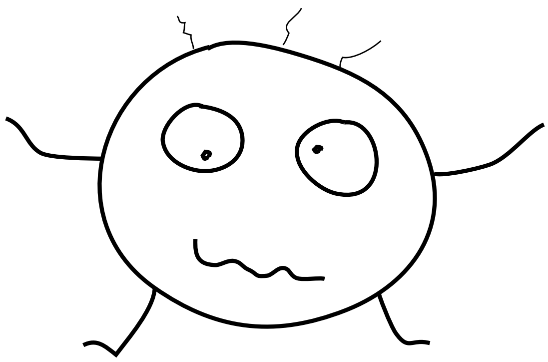
David Gross, Johan Åberg, Markus Heinrich

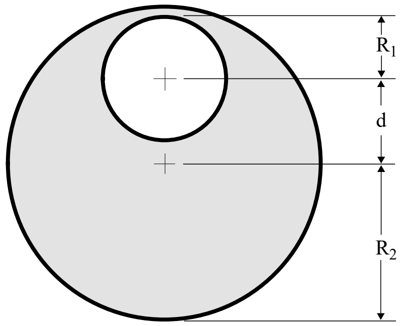
Übungsblatt 10 **Abgabe: 20. Dezember um 12 Uhr**

1 Trägheitstensor für Objekt Å



Manchmal kann man bei der Berechnung von Trägheitsmomenten viel Arbeit sparen indem man einige einfach Tricks benutzt. Einer von diesen hat den Namen "Parallelachsensatz" (oder auch "Steinerscher Satz") und besagt das Folgende: Angenommen ein starrer Körper der Masse M hat das Trägheitsmoment I_x bezüglich einer Achse x durch seinen Schwerpunkt. Dann ist das Trägheitsmoment bezüglich einer zu x parallele Achse x' im Abstand d gegeben durch $I_{x'} = I_x + Md^2$. Eine weitere nützliche Beobachtung ist, dass für einen Körper C, der aus Körpern B und A zusammengesetzt ist, sich die Trägheitsmomente addieren: $I_C = I_A + I_B$. Analog gilt $I_C = I_A - I_B$, wenn C dadurch entsteht, dass man B von A abzieht.





Links sehen wir eine realistische Darstellung des Objektes Å. Dieser Körper hat Masse M und kann recht gut durch eine Kugel mit Radius R_2 und gleichförmiger Massendichte beschrieben werden, in der sich ein kugelförmiger Hohlraum (in der Nähe des Kopfes) befindet. Dieser Hohlraum habe den Radius R_1 und seine Mitte sei um eine Strecke d von der Mitte der großen Kugel verschoben. Es gilt $R_2 \geq R_1 + d$, d.h. der Hohlraum liegt innerhalb der großen Kugel.

a) *Wie sind die Hauptachsen des Objekts Å orientiert?* **(1 Punkte)**

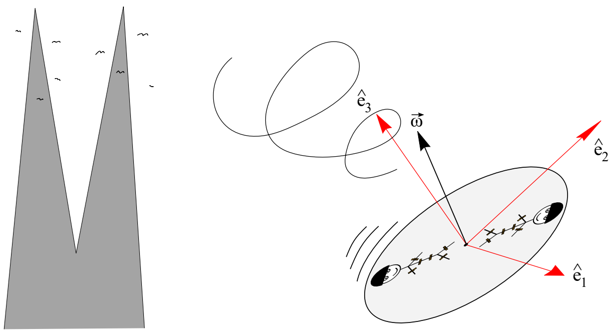
b) *Bestimmen Sie den Trägheitstensor bzgl. des Koordinatensystems, dessen Ursprung im Zentrum der großen Kugel sitzt und dessen Achsen parallel zu den Hauptachsen sind.*

(5 Punkte)

Kommentar: Diese Aufgabe beschäftigt sich Trägheitstensoren und einigen Techniken um diese zu berechnen.

2 Anna und Bernd auf neuen Abenteuern

Anna und Bernd waren gerade in einer Vorlesung über starre Körper, bei der sie sich sehr fasziniert davon gezeigt haben, dass Frisbees torkeln während diese sich drehen. Allerdings haben Anna und Bernd nicht so recht die Theorie dahinter verstanden, also wollen sie empirisch herausfinden wie schnell ein Frisbee verglichen mit seiner Drehung torkelt. Ihr Plan ist es einen riesigen Frisbee zu bauen, sich darauf zu schnallen und diesen dann von einem der beiden Türme der Kathedrale, die praktischerweise mitten in ihrer Stadt gebaut wurde, abzuschiessen.[1] Vielleicht können Sie ja Anna und Bernd helfen, die Antwort durch eine weniger drastische, theoretische Alternative zu finden.



Der Frisbee ist ein Spezialfall eines freien, symmetrischen Kreisels. Das "frei" steht dafür, dass kein Drehmoment auf den Kreisel wirkt, so dass der Gesamtdrehimpuls erhalten ist.[2] "Symmetrisch" meint hier, dass zwei der Hauptträgheitsmomente bezüglich des Schwerpunkts gleich sind, d.h. $I_1 = I_2 \neq I_3$. Im Weiteren setzen wir $I = I_1 = I_2$ und $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ seien die Einheitsvektoren in der Richtung der Hauptachsen in einem körperfesten Bezugssystem.[3] Bezüglich dieses Bezugssystems können wir die Winkelgeschwindigkeit wie folgt entwickeln:

$$\vec{\omega} = \omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2 + \omega_3 \hat{e}_3. \tag{1}$$

Die Zeitentwicklung der Komponenten $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ beschreibt wie sich die Winkelgeschwindigkeit aus Sicht von Anna und Bernd entwickelt.

a) *Was sind die Euler-Gleichungen für den freien symmetrischen Kreisel? Bestimmen Sie deren allgemeine Lösung.* Sie werden sehen, dass (ω_1, ω_2) einen Kreis beschreibt. *Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit Ω dieser Kreisbewegung.*

(4 Punkte)

b) *Angenommen, der Frisbee ist eine Scheibe mit gleichmäßiger Massenverteilung. Bestimmen Sie wie Ω von ω_3 abhängt.* Sie können die Trägheitsmomente einer Scheibe nachschauen und müssen diese nicht berechnen.

(2 Punkte)

Kommentar: Der Zweck dieser Aufgabe ist es die Euler-Gleichungen einzuführen.

---

[1] Als sie diese Idee auf ihrem Facebook-Account, "The Kamikaze physicists", gepostet haben, haben sie dafür zahlreiche "Likes" bekommen und ihr Kommilitone "Luci" (siehe Blatt 9) hat ihnen einige mutmachende Kommentare hinterlassen. Daher sind sie sich sehr sicher, dass das eine großartige Idee ist.

[2] Auf einen richtigen Frisbee wirken natürlich diverse Kräfte wie Reibung, die ein Drehmoment ausüben, aber das ignorieren wir hier.

[3] Diese hießen $\vec{h}_1(t), \vec{h}_2(t), \vec{h}_3(t)$ in der Vorlesung.

3 Der Frisbee im Laborsystem

Anna und Bernd sind ein bisschen verwirrt durch die Lösung, die Sie in der letzten Aufgabe erhalten haben. Wurde nicht in der Vorlesung gesagt, dass der Frisbee mit der doppelten Drehgeschwindigkeit torkeln sollte? Sie haben wahrscheinlich schon den Grund darin erkannt, dass wir uns in der letzten Aufgabe die Zeitentwicklung der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ bezüglich des nicht-Inertialsystems $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$, das starr mit dem Frisbee verbunden ist, angeschaut haben. In der Vorlesung wurde aber das Torkeln und die Drehung verglichen, wie sie von einem ruhenden Beobachters gesehen werden (also in einem Inertialsystem). Im Prinzip könnten wir die Euler-Winkel benutzen, um die unser Ergebnis vom körperfesten Bezugssystem in ein ruhendes Laborsystem zu übertragen. Das kann allerdings sehr verwirrend sein, also wollen wir hier einen anderen Weg wählen.

Im Foglenden wollen wir zeigen, dass $\hat{e}_3$ eine Kreisbewegung beschreibt und die Geschwindigkeit dieses Torkelns mit ω_3 vergleichen. Schlussendlich betrachten wir den Fall, in dem die Drehung um $\hat{e}_3$ sehr schnell ist und wenden das auf unser idealisiertes Modell des Frisbees an.

a) Sei $L = |\vec{L}|$ und $\hat{L} = \vec{L}/L$ (d.h. L ist der Betrag von $\vec{L}$ und $\hat{L}$ ist die Richtung). *Leiten Sie die Beziehung*

$$\vec{\omega} = \frac{L}{I}\hat{L} - \tilde{\Omega}\hat{e}_3, \tag{2}$$

her und bestimmen Sie die Konstante $\tilde{\Omega}$, ausgedrückt durch I, I_3 und $\omega_1, \omega_2, \omega_3$.

Hinweis: Erinnern Sie sich daran, dass $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ die Hauptachsen des Körpers sind und benutzen Sie die Beziehung zwischen dem Drehimpuls $\vec{L}$ und der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$. Kombinieren Sie dies mit (1).

(2 Punkte)

b) *Benutzen Sie (2) um Folgendes zu zeigen:*

$$\frac{d\hat{e}_3}{dt} = \frac{L}{I}\hat{L} \times \hat{e}_3. \tag{3}$$

Hinweis: Erinnern Sie sich daran, dass die Änderung eines Vektors $\vec{v}$, der starr mit dem rotierenden Körper verbunden ist, gegeben ist durch $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v}$. Sie können dieses Problem lösen, auch wenn Sie die Konstante $\tilde{\Omega}$ in a) nicht bestimmmen konnten!

(2 Punkte)

c) Wie erwähnt, ist $\vec{L}$ erhalten (und daher sind sowohl der Betrag L als auch die Richtung $\hat{L}$ konstant). Da $\hat{L}$ konstant ist, beschreibt (3) die Kreisbewegung von $\hat{e}_3$ um einen festen Vektor $\hat{L}$ mit Winkelgeschwindigkeit L/I. *Leiten Sie einen Ausdruck für L durch $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ und I, I_3 her.*

(2 Punkte)

d) Nehmen Sie nun an, dass der Körper sehr schnell um die Achse $\hat{e}_3$, verglichen mit den anderen, rotiert. D.h. $\omega_3 \gg \omega_1$ und $\omega_3 \gg \omega_2$.[4] *Finden Sie eine Näherung für L/I, die nur von I, I_3, ω_3 abhängt.*

Was ist das Verhältnis zwischen der Torkelgeschwindigkeit und der Drehgeschwindigkeit ω_3, wenn wir wie in 2b) annehmen, dass der Frisbee eine gleichförmige Scheibe ist?[5] **(2 Punkte)**

Kommentar: Hier greifen wir die Kommentare in der Vorlesung bezüglich des Frisbees auf.

[4] Genau genommen gilt $I_3^2\omega_3^2 \gg I^2(\omega_1^2 + \omega_2^2)$.

[5] Hier haben wir das Torkeln von $\hat{e}_3$ mit ω_3 verglichen. Allerdings kann man alternativ auch fragen wie das Torkeln von $\vec{\omega}$ sich zu ω_3 verhält. Es stellt sich heraus, dass $\hat{e}_3$ und $\vec{\omega}$ mit der gleichen Frequenz torkeln. Um das zu sehen, erinnern Sie sich daran, dass ω_3 konstant ist. Dann kann man (2) und (3) benutzen um zu zeigen, dass $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{L}{I}\hat{L} \times \vec{\omega}$. Der Rest der Argumentation ist wie zuvor.