Klassische Mechanik

David Gross, Johan Åberg, Markus Heinrich

Übungsblatt 11 **Abgabe: 10. Januar um 12 Uhr**

1 Von Lagrange zu Hamiton

Leiten Sie für die folgenden Lagrangefunktionen die zugehörige Hamiltonfunktion und die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen her.

a) Blatt 7, Aufgabe 1: Perle auf einem rotierenden Ring

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{m}{2} R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{m}{2} R^2 \Omega^2 \sin^2\theta + mgR\cos\theta$$

(2 Punkte)

b) Blatt 9, Aufgabe 1: Das abschreckende Beispiel

$$L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{m}{2}(1 + \frac{\alpha^2}{r^6})\dot{r}^2 + \frac{m}{2} r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{mg\alpha}{2r^2}$$

(3 Punkte)

Kommentar: Dieses Blatt konzentriert sich vorrangig auf die Transformation vom Lagrange- zum Hamilton-Formalismus und die Bestimmung der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen aus der Hamiltonfunktion.

2 Eine vernünftigere Transformation

Wie Sie vielleicht schon in der letzten Übung festgestellt haben, kann es etwas mühsam sein, immer wieder die Übersetzung vom Lagrange- in den Hamilton-Formalismus zu machen. In der Praxis findet man häufig bestimmte Strukturen vor und kann für diese die Transformation ein für alle Mal herleiten.

In vielen Fällen (aber sicherlich nicht immer[1]) hat die Lagrangefunktion die Form

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = T(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) - V(\vec{q}, t), \qquad T(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = \frac{1}{2} \sum_k f_k(\vec{q}) \dot{q}_k^2, \tag{1}$$

wobei $f_k(\vec{q})$ beliebige Funktionen der verallgemeinerten Koordinaten $\vec{q} = (q_1, \ldots, q_N)$ sind und $V(\vec{q}, t)$ ein möglicherweise zeitabhängiges Potential ist.

Zeigen Sie, dass die Hamiltonfunktion folgende Form hat:

$$H(\vec{q}, \vec{p}, t) = \frac{1}{2} \sum_k \frac{p_k^2}{f_k(\vec{q})} + V(\vec{q}, t),$$

wobei $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_N)$ die zu $\vec{q} = (q_1, \ldots, q_N)$ konjugierten Impulse sind. **(3 Punkte)**

Kommentar: In dieser Aufgabe gehen wir über spezielle Beispiele hinaus und identifizieren eine allgemeine Struktur der Transformation. Eine solche Herangehensweise ist oft nützlich, nicht nur um sich Arbeit zu ersparen, sondern auch um ein besseres Verständnis zu erlangen.

[1] Die Lagrangefunktion aus Aufgabe 4 ist beispielsweise nicht von der Form (1)

3 Teilchen in einem zeitabhängigen Potential

Ein Teilchen der Masse m bewege sich entlang einer Geraden. Wir definieren die Koordinate q als die Position des Teilchens auf dieser Gerade (bezüglich eines beliebigen Referenzpunktes). Das Teilchen unterliege einem zeitabhängigen Potential $V(q,t) = C\cos(\omega t)q$ mit Konstanten C und ω.

a) *Bestimmen Sie die Lagrange- und Hamiltonfunktion des Teilchens.* **(2 Punkte)**

b) *Leiten Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen her und lösen Sie diese für die Anfangsbedingungen $q(0) = 0$ und $p(0) = p_0$.*

(2 Punkte)

Kommentar: Diese Aufgabe ist ein explizites Beispiel dafür, wie man den Formalismus bei einem zeitabhängigen Potential anwendet. Zusätzlich können wir in diesem Fall eine analytische Lösung der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen finden.

4 Teilchen in einem elektromagnetischen Feld

Die Lagrangefunktion eines Teilchens der Masse m, elektrischen Ladung e und Ort $\vec{r}$, das sich einem elektromagnetischen Feld bewegt, hat folgende Form

$$L(\vec{r},\dot{\vec{r}}) = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - e\phi(\vec{r},t) + e\vec{A}(\vec{r},t)\cdot\dot{\vec{r}}, \tag{2}$$

dabei ist $\phi(\vec{r},t)$ eine reellwertige Funktion (das *skalare Potential*) und $\vec{A}(\vec{r},t)$ eine vektorwertige Funktion (das *Vektorpotential*)[2].

Keine Panik! Sie sind zwar wahrscheinlich noch nicht mit Elektromagnetismus und Vektorpotentialen vertraut, aber das brauchen Sie für diese Aufgabe auch gar nicht. Sehen Sie Gl. (2) einfach als eine weitere, etwas komisch aussehende Lagrangefunktion.

a) Führen wir nun kartesische Koordinaten $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)$ und $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$ ein. *Zeigen Sie, dass die Euler-Lagrange-Gleichungen wie folgt geschrieben werden können:*[3]

$$m\ddot{r}_j + e\left(\frac{\partial\phi}{\partial r_j} + \frac{\partial A_j}{\partial t}\right) - e\sum_{k=1}^{3}\dot{r}_k\left(\frac{\partial A_k}{\partial r_j} - \frac{\partial A_j}{\partial r_k}\right) = 0, \quad j = 1,2,3. \tag{3}$$

Hinweis: Es kann nützlich sein, erst Gl. (2) in kartesischen Koordinaten auszuschreiben: $L(\vec{r},\dot{\vec{r}}) = \frac{m}{2}\sum_{k=1}^{3}\dot{r}_k^2 - e\phi(\vec{r},t) + e\sum_{k=1}^{3}A_k(\vec{r},t)\dot{r}_k$.

(2 Punkte)

b) Sei $\chi(\vec{r},t)$ eine reellwertige Funktion und nehmen wir an, wir transformieren ϕ und $\vec{A}$ in neue Funktionen ϕ' und $\vec{A}'$ wie folgt

$$\phi' = \phi - \frac{\partial\chi}{\partial t}, \quad \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi.$$

Es sei L' die neue Lagrangefunktion, die man dadurch erhält, dass man ϕ und $\vec{A}$ in (2) durch ϕ' und $\vec{A}'$ ersetzt. *Zeigen Sie, dass sich L und L' nur durch eine totale Zeitableitung einer Funktion von $\vec{r}$ und t unterscheiden.* **(2 Punkte)**

Bemerkung: Diese Art der Transformation der Potentiale heißt Eichtransformation. Erinnern Sie sich, dass die Addition einer totalen Zeitableitung zu der Lagrangefunktion die Euler-Lagrange-Gleichungen nicht ändert (und somit auch nicht die Zeitentwicklung des Systems).

[2] Das elektrische und magnetische Feld erhält man durch $\vec{E}(\vec{r},t) = -\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$ und $\vec{B}(\vec{r},t) = \nabla\times\vec{A}$.

[3] Die üblichere Variante Gl. (3) zu schreiben ist $m\ddot{\vec{r}} = e\vec{E} + e\dot{\vec{r}}\times\vec{B}$. Die rechte Seite ist die sogenannte *Lorentzkraft*.

c) *Leiten Sie die Hamiltonfunktion her.* **(2 Punkte)**

d) *Leiten Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen her.* **(2 Punkte)**

Kommentar: Hierbei handelt es sich um nichttriviales Beispiel der Anwendung des Lagrange- und Hamilton-Formalismus. Außerdem erhalten wir einen ersten Einblick in das Konzept der Eichinvarianz, das Ihnen in anderen Vorlesungen wieder begegnen wird.