Klassische Mechanik

David Gross, Johan Åberg, Markus Heinrich

Übungsblatt 13 **Abgabe: 24. Januar um 12 Uhr**

1 Lösen der Bewegungsgleichungen mittels kanonischer Transformation

In dieser Übung wollen wir eine kanonische Transformation benutzen um die Bewegungsgleichungen zu lösen.

a) Betrachten Sie die Transformation von (q, p) zu (Q, P) gegeben durch

$$Q = \alpha p q^{\gamma}, \quad P = \beta q^{\delta}, \tag{1}$$

dabei sind α, β, γ und δ Konstanten. *Was sind die Bedingungen an α, β, γ und δ damit (1) eine kanonische Transformationen ist?*

Hinweis: Rufen Sie sich die Charakterisierung von kanonischen Transformationen durch Poisson-Klammern und deren Definition in Erinnerung.

(3 Punkte)

b) *Finden Sie eine kanonische Transformation von (q, p) zu (Q, P), die folgende Hamiltonfunktion,*

$$H(q, p) = \frac{1}{2}p^2 q^4 + \frac{1}{2q^2} \tag{2}$$

in die des harmonischen Oszillators,

$$H(Q, P) = \frac{1}{2}P^2 + \frac{1}{2}Q^2,$$

transformiert.

Hinweis: Es gab einen Grund, warum wir Aufgabe a) gemacht haben. **(2 Punkte)**

c) Benutzen Sie das Ergebnis aus b) um die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen für (2) zu lösen. **(2 Punkte)**

Kommentar: Hier zeigen wir wie die in der Vorlesung kennen gelernten kanonischen Transformationen benutzt werden können um die Bewegungsgleichungen eines System zu lösen.

2 Erzeugende Funktionen für kanonische Transformationen

Betrachten Sie eine Funktion $F_1(q, Q)$ der alten und neuen Koordinaten q bzw. Q. Diese definiert eine kanonische Transformation zwischen (q, p) und (Q, P) durch die beiden Gleichungen

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q}. \tag{3}$$

Die Funktion F_1 wird in diesem Zusammenhang auch erzeugende Funktion dieser Transformation genannt.

a) Betrachten Sie die Funktion

$$F_1(q, Q) = \frac{m\omega}{2} q^2 \frac{1}{\tan Q},$$

wobei m und ω Konstanten sind. *Benutzen Sie die Gleichungen (3) um q und p als Funktionen von Q und P auszudrücken.* **(2 Punkte)**

Hinweis: Durch die Gleichungen (3) erhalten Sie p und P als Funktionen von q und Q. Stellen Sie diese so um, dass Sie q und p als Funktionen von Q und P erhalten. Vernachlässigen Sie dabei Betrachtungen über die Wohldefiniertheit der Wurzeln und deren Vorzeichen.

b) Betrachten Sie die Hamiltonfunktion des harmonischen Oszillators:

$$H(q, p) = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{m\omega^2}{2} q^2.$$

Drücken Sie H durch die neuen Variablen Q und P aus. Wie lautet die Lösung der entsprechenden Bewegungsgleichung? **(2 Punkte)**

Bemerkung: Durch Transformation dieser Lösung zurück in die ursprünglichen Koordinaten (q, p) kann man ebenfalls die Lösungen der Bewegungsgleichungen des harmonischen Oszillators erhalten.

Kommentar: Erzeugende Funktionen sind eine praktische Methode für die Konstruktion von kanonischen Transformationen.

3 Erzeugende Funktionen für kanonische Transformationen, die Zweite

In der letzten Übung haben wir eine erzeugende Funktion der Form $F_1(q, Q)$ betrachtet. Darüber hinaus ist es auch möglich erzeugende Funktionen $F_2(q, P)$, $F_3(p, Q)$ und $F_4(p, P)$ zu benutzen. Als Beispiel wollen wir hier den Fall $F_3(p, Q)$ betrachten. Solche Funktionen definieren kanonische Transformationen von (q, p) zu (Q, P) durch

$$q = -\frac{\partial F_3}{\partial p}, \quad P = -\frac{\partial F_3}{\partial Q}. \tag{4}$$

Beachten Sie das unterschiedliche Vorzeichen im Vergleich zu (3)!

a) Betrachten Sie die Funktion

$$F_3(p, Q) = -(e^Q - 1)^2 \tan p.$$

Benutzen Sie (4) um Q und P als Funktionen von q und p zu bestimmen.

Hinweis: Wie in der letzten Aufgabe müssen Sie sich nicht um die Wohldefiniertheit von Wurzeln (oder Logarithmen) kümmern. **(2 Punkte)**

b) *Benutzen Sie Poisson-Klammern um zu zeigen, dass $Q(q, p)$ und $P(q, p)$ aus a) eine kanonische Transformation von (q, p) zu (Q, P) definieren.* **(3 Punkte)**

Kommentar: Der Zweck dieser Aufgabe ist es die Vorlesung und die letzte Aufgabe zu ergänzen. Hier sehen wir, dass es neben erzeugenden Funktionen der Form $F(q, Q)$ auch noch andere Möglichkeiten gibt.