Klassische Mechanik

David Gross, Johan Åberg, Markus Heinrich

Übungsblatt 2 Abgabe: 26. Oktober um 12 Uhr

1 Raketengleichung

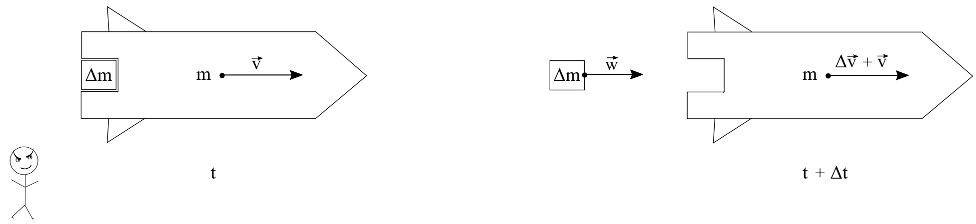

Abbildung 1: Zur Zeit t bewege sich eine Rakete der Masse m mit Treibstoff der Masse Δm an Bord mit einer Geschwindigkeit $\vec{v}$ relativ zu einem ruhenden Beobachter. Zur Zeit $t + \Delta t$ sei Δm an Treibstoff ausgestoßen worden und dieser bewege sich mit einer Geschwindigkeit $\vec{w}$ relativ zu den selbem Beobachter. Zugleich habe die Rakete nun die Geschwindigkeit $\vec{v} + \Delta\vec{v}$. Um die Raketengleichung herzuleiten, betrachten wir die Impulsänderung des Systems für kleine Zeiten Δt.

Eine Rakete wird durch Rückstoßkräfte angetrieben, die dadurch entstehen, dass sie Treibstoff verbrennt und die entstehenden Gase ausstößt. Dabei verliert sie an Masse, was natürlich ihre Beschleunigung beeinflusst. Die Raketengleichung beschreibt die zeitliche Entwicklung ihrer Geschwindigkeit:

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{u}\frac{dm}{dt}. \tag{1}$$

Hierbei sei $\vec{v}$ die Geschwindigkeit der Rakete relativ zu einem ruhenden Beobachter und $\vec{u}$ sei die Geschwindigkeit *relativ zur Rakete*, mit der das Gas ausgestoßen werde. m sei die Masse der Rakete inklusive Treibstoff. $\vec{F}$ sei die Summe der äußeren Kräfte (z.B. Schwerkraft), die auf die Rakete wirkten. Für die Herleitung der Raketengleichung kann es hilfreich sein die Geschwindigkeit $\vec{w}$ des ausgestoßenen Gases relativ zu dem ruhenden Beobachter einzuführen.

a) Nehmen Sie an, dass die Rakete zur Zeit t die Masse $m + \Delta m$ und Geschwindigkeit $\vec{v}$ relativ zu dem ruhenden Beobachter habe. Nach einer Zeit Δt habe die Rakete die Masse m und Geschwindigkeit $\vec{v} + \Delta\vec{v}$, während das ausgestoßene Gas die Masse Δm und Geschwindigkeit $\vec{w}$ (wieder relativ zu dem Beobachter) habe. *Wie groß ist die Änderung des Gesamtimpulses der Rakete und des ausgestoßenen Gases in der Zeit Δt?* **(3 Punkte)**

b) *Benutzen Sie das Ergebnis von (a) um Gl. (1) herzuleiten.* **(3 Punkte)**

Hinweis: Betrachten Sie den Grenzwert $\Delta t \to 0$. Was ist die Beziehung zwischen Kraft und zeitlicher Ableitung des Impulses? Sie sollten eine Gleichung ähnlich zu Gl. (1) bekommen, die Sie noch etwas umformulieren müssen. Überlegen Sie sich, in welcher Beziehung die Geschwindigkeiten $\vec{w}$, $\vec{u}$ und $\vec{v}$ stehen. Was ist die Beziehung zwischen $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ und $\frac{dm}{dt}$ im Grenzwert $\Delta t \to 0$?

c) Angenommen die Rakete befinde sich im Weltall, d.h. $\vec{F} = 0$, und die Geschwindigkeit $\vec{u}$ sei konstant. Weiterhin sei die Rakete anfänglich in Ruhe (relativ zu dem Beobachter). *Drücken Sie die Endgeschwindigkeit der Rakete nach einer Zeit t durch die Ausstoßgeschwindigkeit $\vec{u}$, sowie die Anfangs- und Endmasse m_i und m_f der Rakete aus. Hängt die Endgeschwindigkeit von der Zeit t ab, die die Rakete braucht um die Endmasse m_f zu erreichen?* **(3 Punkte)**

d) Nehmen Sie nun an, dass wir die Rakete entgegen eines konstanten Gravitationsfeldes beschleunigen wollen. Die Ausstoßgeschwindigkeit sei konstant und zeige in Richtung des Gravitationsfeldes. Die Rakete sei zu Anfangs wieder in Ruhe. *Leiten Sie nochmals eine Formel für die Endgeschwindigkeit her. Hängt die Endgeschwindigkeit nun von der Zeit t ab, die die Rakete braucht um die Endmasse m_f zu erreichen? Können Sie damit erklären, warum wir beim Start einer Rakete ein derart spektakuläres Zünden des Treibstoffes beobachten können (mal abgesehen davon, dass Diktatoren glauben, dass es einfach verdammt cool aussieht)?* **(3 Punkte)**

Bemerkung: Das Ziel dieser Aufgabe ist es die Konsequenzen der Impulserhaltung zu erforschen.

2 Anwendung der Keplerschen Gesetze

Keplers erstes Gesetz besagt, dass sich Planeten auf Ellipsen um die Sonne bewegen[1]. Man kann den Orbit eines Planeten mittels Polarkoordinaten beschreiben, wobei der Radius r vom Polarwinkel θ wie folgt abhängt:

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos\theta}. \tag{2}$$

Hierbei ist ϵ die Ekzentrizität der Ellipse und p bestimmt die Größe des Orbits. Das zweite Keplersche Gesetz sagt aus, dass the Verbindungslinie des Planeten zur Sonne in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht. Das dritte Gesetz verbindet die große Halbachse a des Orbits mit seiner Periode T:

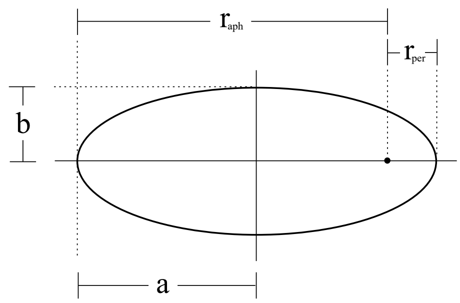

Abbildung 2: Die große Halbachse a und die kleine Halbachse b einer Ellipse, sowie der minimale Abstand r_{per} zur Sonne (Periheldistanz) and maximale Abstand r_{aph} (Apheldistanz).

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(M+m)}{(2\pi)^2}.$$

Hierbei sind M und m die Massen von Sonne und Planet und $G \approx 6.67 \cdot 10^{-11} Nm^2/kg^2$ ist die Gravitationskonstante.

a) Vor der Landung von Apollo 11 kreiste die Kapsel um den Mond. Die Masse von Apollo 11 betrug 9979 kg und die Period des Orbits war 119 min. Ihr maximaler und minimaler Abstand von Zentrum des Mondes war 1861 km bzw. 1838 km. *Benutzen Sie diese Daten um die Masse des Mondes zu schätzen.* **(2 Punkte)**

b) Der Halleysche Komet bewegt sich auf einer elliptischen Umlaufbahn mit einer Periode von 76 Jahren um die Sonne. Ihre Ekzentrizität beträgt $\epsilon = 0.97$. Die Masse der Sonne ist $M = 2.0 \cdot 10^{30} kg$. *Berechnen Sie die Distanz der Sonne zum Perihel (dem Punkt, wenn der Komet der Sonne am Nächsten kommt) und zum Aphel (wenn er am Weitesten entfernt ist).* **(3 Punkte)**

Hinweis: Die Kometenmasse kann verglichen mit der Sonnenmasse vernachlässigt werden.

c) *Was ist das Verhältnis der Bahngeschwindigkeiten des Halleyschen Kometen am Perihel und am Aphel?* Es könnte nützlich sein, die Relation $r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{const.}$ zu benutzen, die aus der Drehimpulserhaltung folgt. **(3 Punkte)**

Hinweis: Wie groß ist die Radialgeschwindigkeit am Perihel bzw. Aphel? Wie hängt die Bahngeschwindigkeit mit dieser, der Winkelgeschwindigkeit und dem Radius r zusammen?

Bemerkung: Das Ziel dieser Aufgabe ist es Keplers Gesetze anzuwenden.

[1] Die Keplerschen Gesetze lassen sich nicht nur auf Planeten anwenden, die um die Sonne kreisen, sondern auch auf viele andere Konstellationen. Streng genommen beschreibt Gl. (2) die Bewegung um den Schwerpunkt der beiden Körper. In unserem Fall ist die Masse des kleineren Körpers aber stets vernachlässigbar und daher fällt der Schwerpunkt ungefähr mit dem Ort des schwereren Körpers zusammen.