Klassische Mechanik

David Gross, Johan Åberg, Markus Heinrich

Übungsblatt 4 **Abgabe: 8. November um 12 Uhr**

1 Der Laplace-Runge-Lenz-Vektor

Sie haben inzwischen die Erhaltungsgröße Energie, Impuls und Drehimpuls kennen gelernt. Manche Systeme können aber auch "exotischere" Erhaltungsgrößen besitzen. Als solches entpuppt sich auch das Kepler-Problem, also die Bewegung eines Teilchens in einem Potential der Form $V(\vec{r}) = -\alpha/r$ mit $r = \|\vec{r}\|$ und einer Konstanten α. Wie in jedem zentralsymmetrischen Potential ist die Gesamtenergie und der Drehimpuls im Bezug auf das Potentialzentrum erhalten. Darüber hinaus finden wir aber noch eine weitere, "zufällige" Erhaltungsgröße, nämlich den sogenannten Laplace-Runge-Lenz-Vektor, der wie folgt definiert ist:

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - m\alpha \frac{\vec{r}}{r}.$$

Zeigen Sie, dass $\vec{A}$ erhalten ist, d.h. $\frac{d\vec{A}}{dt} = 0$.

Hinweis: Benutzen Sie, dass $\vec{L}$ erhalten ist und verwenden Sie die Relation $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$. Zeigen Sie, dass $\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = r\frac{dr}{dt}$. **(6 Punkte)**

Bemerkung: In der Vorlesung wurde behauptet, dass der Laplace-Runge-Lenz-Vektor erhalten ist. Hier zeigen Sie, dass dem so ist.

2 Rotierende Bezugssysteme

Stellen Sie sich folgende alltägliche Situation vor (siehe Abbildung). Vor der Vorlesung in theoretischer Physik haben Sie bis tief in die Nacht fleißig studiert und schlafen auf einem Spielplatzkarussell im Klettenbergpark ein. Als Sie am nächsten Tag aufwachen, dreht sich die Scheibe immer noch mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω.

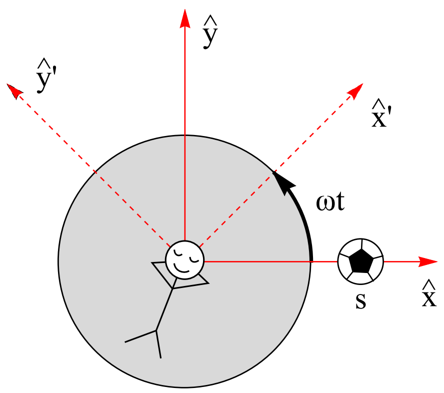

Figure 1: Sie liegen auf einem Spielplatz-Karussell, das sich mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω dreht. Wir definieren ein mitbewegtes Koordinatensystem mit Einheitsvektoren $\hat{x}', \hat{y}'$, das also bezüglich des ruhenden Koordinatensystems $\hat{x}, \hat{y}$ rotiert. Bezüglich $\hat{x}, \hat{y}$ habe ein Ball die Koordinaten $r_0 = (x_0, y_0)^T = (s, 0)^T$.

a) Das sich mit dem Karussell mitbewegende Koordinatensystem $\hat{x}', \hat{y}'$ rotiere mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω bezüglich des Systems $\hat{x}, \hat{y}$ (siehe Abbildung). Wir bezeichnen die Koordinaten in dem beiden System mit $\boldsymbol{r} = (x, y)^T$ beziehungsweise $\boldsymbol{r}' = (x', y')^T$, so dass folgendes gilt[1]:

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} = x'\hat{x}' + y'\hat{y}'.$$

Leiten Sie ein Beziehung zwischen den Vektoren $\hat{x}, \hat{y}$ und $\hat{x}', \hat{y}'$ her. Wie lautet die Transformation zwischen den entsprechenden Koordinaten? **(4 Punkte)**

b) Etwas vom Karussel entfernt liege ein Ball in Ruhe bezüglich dem Inertialsystem gegeben durch $\hat{x}, \hat{y}$. Die Koordinaten des Balles in diesem Bezugssystem seien $\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0)^T = (s, 0)^T$ für $s > 0$. *Was sind die Koordinaten $\boldsymbol{r}'_0 = (x'_0, y'_0)^T$ des Balles im rotierenden Bezugssystem?*

Plötzlich kommt ein Kind angerannt und kickt den Ball weg, so dass sich dieser reibungslos mit konstanter Geschwindigkeit v in die $\hat{y}$-Richtung bewegt (die Geschwindigkeit ist also $v\hat{y}$). *Bestimmen Sie die Koordinaten $\boldsymbol{r}'_1 = (x'_1, y'_1)^T$ des fliegenden Balles bezüglich des rotierenden Bezugssystems.* **(3 Punkte)**

c) *Zeichnen Sie die Kurven, die die Koordinaten $\boldsymbol{r}'_0$ und $\boldsymbol{r}'_1$ in der Ebene beschreiben.* Eine qualitative Skizze ist genug, aber zeichnen Sie die Bewegungsrichtung durch Pfeile ein. **(2 Punkte)**

d) Stellen Sie sich nun vor, dass Sie nach einem kurzen Nickerchen aufwachen und vergessen haben, dass Sie auf einem Karussel liegen. Stattdessen glauben Sie, dass Sie sich in einem Inertialsystem befinden. *Welche Kräfte $\boldsymbol{F}'_0$ und $\boldsymbol{F}'_1$ müssen Sie annehmen, damit das Newtonsche Gesetz $\boldsymbol{F}'_j = m\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{r}'_j$ für die beiden Flugbahnen $j = 0, 1$ gilt?* **(5 Punkte)**

Bemerkung: Diese Aufgabe soll die Unterschiede zwischen Inertial- und Nichtinertialsystem verdeutlichen.

[1] T bezeichnet hier die Transposition