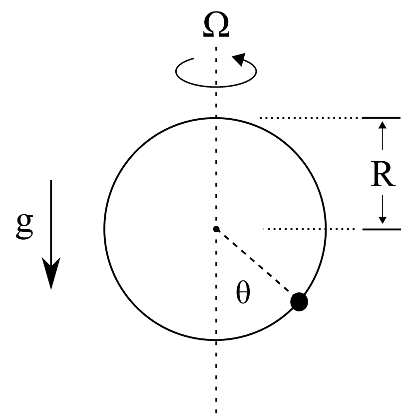
Klassische Mechanik

David Gross, Johan Åberg, Markus Heinrich

Übungsblatt 7 **Abgabe: 29. November um 12 Uhr**

1 Perle auf einem rotierenden Ring



Eine Perle der Masse m gleite ohne Reibung auf einem Ring des Radiuses R, der um seine vertikale Achse mit eine konstanten Winkelgeschwindigkeit Ω rotiere.

a) *Leiten Sie die Lagrangefunktion als Funktion des Winkels θ her, den die Verbindungslinie zwischen dem Mittelpunkt des Ringes und der Perle mit der vertikalen Achse einschließt.* **(2 Punkte)**

b) Die so erhaltene Lagrangefunktion ist äquivalent zu der eines Teilchens der Masse M, das sich auf der reellen Achse unter Einfluss eines (periodischen) Potentials $V(\theta)$ bewegt. *Bestimmen Sie M und $V(\theta)$.* **(1 Punkte)**

c) *Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung der Perle.* **(2 Punkte)**

d) Die Gleichgewichtskonfigurationen der Perle hängen von der Winkelgeschwindigkeit Ω ab. *Berechnen Sie diese als Funktion von Ω und zeigen Sie, ob diese stabil oder instabil sind.*

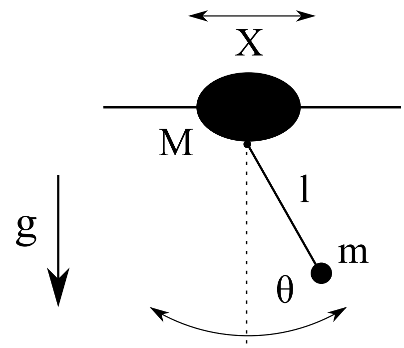
Hinweis: Abhängig von Ω ergeben sich verschiedene Fälle.

Bemerkung: Die Gleichgewichtskonfigurationen eines Teilchen, das sich in einem Potential V bewegt, sind gegeben durch die Punkte an denen die Ableitung (oder allgemeiner der Gradient) des Potentials V null ist. Das heißt, dass wenn wir das Teilchen an einem solchen Punkt in Ruhe platzieren, wird es dort bleiben. Weiterhin ist eine Gleichgewichtskonfiguration stabil, wenn es sich um ein lokales Minimum handelt. Für hinreichend kleine Störungen wird das Teilchen dann eine gebundene Bewegung um die Gleichgewichtsposition ausführen. Ein instabiles Gleichgewicht liegt dagegen vor, wenn es sich um ein lokales Maximum handelt, denn dann bewegt sich das Teilchen bei einer beliebig kleinen Störung von der Position weg.[1]

(4 Punkte)

Bemerkung: Der primäre Zweck dieser Übung ist es den Lagrange-Formalismus zu üben. Weiterhin sollen die Konzepte von stabilen und instabilen Gleichgewichten eingeführt und wie diese von externen Parametern abhängen können.

[1] Streng genommen gibt es auch den Fall eines neutralen Gleichgewichts wenn das Potential flach ist.



2 Pendel an einem bewegbaren Aufhängepunkt

Ein Objekt der Masse M könne ohne Reibung auf einer horizontalen Schiene gleiten. An diesem hänge eine masselose Stange der Länge l, an der am Ende eine Masse m befestigt sei. Das Pendel könne (ohne Reibung) in der von der Schiene und der vertikalen Richtung aufgespannten Ebene schwingen.

a) *Leiten Sie die Lagrangefunktion als Funktion der Position X der Masse M und des Winkels θ her.*

(3 Punkte)

b) *Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen.* **(3 Punkte)**

c) *Benutzen Sie die Kleinwinkelnäherung um eine Näherung für diese Gleichungen zu finden.* Genauer nehmen wir an, dass θ so klein ist, dass wir näherungsweise $\sin\theta \approx \theta$ und $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$ schreiben können und dass wir in der resultierenden Gleichung nur Terme erster Ordnung in θ, $\dot{\theta}$ und $\ddot{\theta}$ mitnehmen müssen (z.B. sind θ^2 und $\theta\dot{\theta}$ Terme zweiter Ordnung, während $\theta\dot{\theta}^2$ dritte Ordnung ist). **(2 Punkte)**

d) *Finden Sie eine vollständige Lösung der genäherten Gleichungen aus c). Was sind die Normalmoden und die entsprechenden Frequenzen?* **(3 Punkte)**

Bemerkung: In dieser Übung geht es wieder darum den Umgang mit dem Lagrange-Formalismus zu üben und die Verbindung zu Normalmoden durch die näherungsweise harmonische Oszillation um ein Gleichgewicht herzustellen.