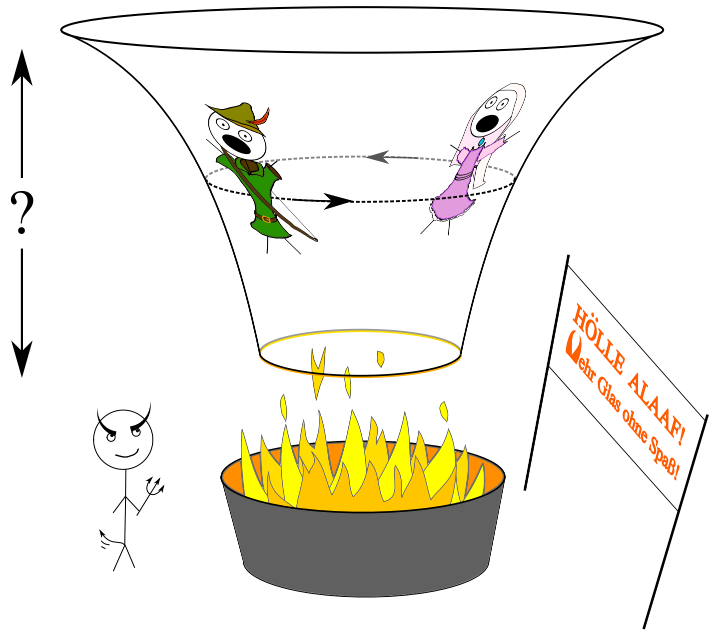
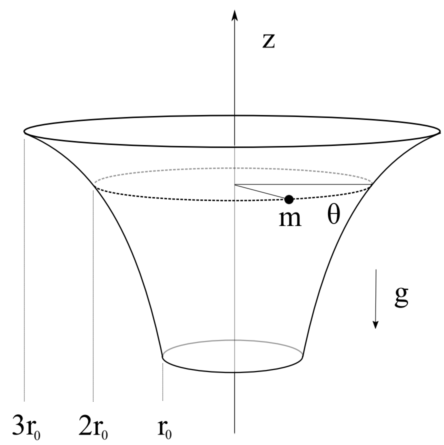
Klassische Mechanik

David Gross, Johan Åberg, Markus Heinrich

Übungsblatt 9 Abgabe: 13. December um 12 Uhr

1 Ein abschreckendes Beispiel zum Ausgleich (nur um sicherzugehen, dass mich keiner für den Aufruf zu Ausschweifungen verklagt)





Anna und Bernd haben sehr gewissenhaft ihre Fröhlichkeit optimiert (siehe Aufgabe 5.2). Vielleicht ein bisschen zu gewissenhaft, denn sie sind dabei ohnmächtig geworden und durchleben nun volltrunken einen Albtraum.[1] In diesem sind sie auf einer zweidimensionalen trichterförmigen Oberfläche gefangen. Wenn Sie zum oberen Ende rutschen, dann entkommen sie ihrem Albtraum, während sie am unteren Ende ihr Studienfreund 'Luci'[2] sehnsüchtig erwartet um ihnen einen besonders warmen Empfang zu bereiten.

Wir betrachen Anna und Bernd als Punktteilchen der Masse m, die reibungslos auf einer Oberfläche gleiten können. Diese erhält man dadurch, dass man die Kurve $z = -\frac{\alpha}{2r^2}$ mit $r_0 \leq r \leq 3r_0$ um die z-Achse rotieren lässt, wobei $\alpha > 0$ und $r_0 > 0$. Die Masse m unterliege einer konstanten Gravitationsbeschleunigung g, die in die negative z-Richtung zeigt. Wir wollen nun herausfinden, ob Anna und Bernd irgendwann r_0 (und ihren Freund Luci) erreichen, ob sie es bis $3r_0$ schaffen (und damit ihrem Albtraum entkommen) oder ob sie für alle Ewigkeit in dem Bereich $r_0 < r < 3r_0$ gefangen sind.

a) *Bestimmen Sie die Lagrangefunktion der Masse m als Funktion der Koordinaten r and θ.* **(2 Punkte)**

b) *Benutzen Sie die Energieerhaltung um eine Differentialgleichung erster Ordnung in r aufzustellen (die also nur r und $\dot{r}$, aber nicht höhere Ableitungen enthält).* **(2 Punkte)**

Hinweis: Man könnte stattdessen auch die Euler-Lagrange-Gleichung herleiten, aber es ist

[1] Aufgepasst Kinder! Das passiert, wenn Ihr Euch exzessivem Trinken hingebt!

[2] Anna und Bernd kennen ihn nicht wirklich, aber jeder nennt ihn 'Luci' und er ist ein Austauschstudent aus irgendeinem Ort mit einem ziemlich heißen Klima. Er studiert den interdisziplinären Physik-Diktator Master-Studiengang in Köln (Teil des SFB 666) und kann da wohl ziemlich glänzen.

einfacher direkt die Energieerhaltung zu benutzen. Benutzen Sie die Zyklizität um $\dot{\theta}$ aus der Gleichung zu eliminieren. **(2 Punkte)**

c) Wir nehmen an, dass die Bewegung der Masse m bei $r(0) = 2r_0$ und unter einem Winkel $\theta(0) = \theta_0$ mit folgender Winkelgeschwindigkeit beginnt:

$$\dot{\theta}(0) = \frac{\sqrt{g\alpha}}{4r_0^2}.$$

Zeigen Sie, dass sich die Differentialgleichung aus b) für diese Anfangsbedingungen zu folgender Gleichung vereinfacht:

$$\frac{m}{2}(1 + \frac{\alpha^2}{r^6})\dot{r}^2 = E. \tag{1}$$

(2 Punkte)

d) *Bestimmen Sie für die Anfangsbedingungen aus c) das Schicksal von Anna und Bernd für all möglichen Anfangswerte der Radialgeschwindigkeit $\dot{r}$.*

Hinweis: Die Gleichung (1) ist separabel und kann prinzipiell integriert werden. Es kann aber recht schwer sein die auftretenden Integral explizit zu lösen. Wir sind allerdings auch nicht wirklich an der exakten Lösung interessiert, sondern nur an Anna und Bernds allgemeines Schicksal. Man könnte als Trick versuchen von r zu einer neuen Koordinate zu wechseln, für die diese Frage leichter zu beantworten ist. Vielleicht könnte irgendwas im Zusammenhang mit der Bogenlänge hilfreich sein. **(2 Punkte)**

Kommentar: Hier kombinieren wir einige Techniken, die wir bisher kennen gelernt haben, nämlich Euler-Lagrange-Gleichungen, Energieerhaltung und Drehimpulserhaltung.

2 Noether-Theorem, Symmetrien und Koordinatenwechsel

Nehmen Sie an, dass ein System durch folgende Lagrangefunktion beschrieben wird

$$L(\lambda, \mu, \dot{\lambda}, \dot{\mu}) = \frac{m}{2}(\lambda^2 + \mu^2)(\dot{\lambda}^2 + \dot{\mu}^2) - \alpha\lambda^2\mu^2, \tag{2}$$

wobei λ und μ verallgemeinerte Koordinaten und α eine Konstante ist.

a) Betrachten Sie die Koordinatentransformation von (λ, μ) nach (λ', μ'), wobei

$$\begin{aligned} \lambda' &= \lambda + sC_\lambda, \quad C_\lambda = \frac{1}{2}\frac{\lambda}{\lambda^2 + \mu^2}, \\ \mu' &= \mu + sC_\mu, \quad C_\mu = \frac{1}{2}\frac{-\mu}{\lambda^2 + \mu^2}, \end{aligned} \tag{3}$$

Zeigen Sie, dass dies (in erster Ordnung in s) eine Symmetrietransformation von L aus Gl. (2) induziert.

Hinweis: Eine Familie von Transformationen $\vec{\Phi}^{(s)} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $\vec{\Phi}^{(0)}(\vec{q}) = \vec{q}$ ist eine Symmetrietransformation der Lagrangefunktion $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$ bis zur ersten Ordnung in s genau dann wenn $L\Big(\vec{\Phi}^{(s)}(\vec{q}(t)), \frac{d}{dt}\vec{\Phi}^{(s)}(\vec{q}(t))\Big) = L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t)) + O(s^2)$. Dies ist äquivalent dazu, dass $\frac{d}{ds}\big|_{s=0} L\Big(\vec{\Phi}^{(s)}(\vec{q}(t)), \frac{d}{dt}\vec{\Phi}^{(s)}(\vec{q}(t))\Big) = 0.$[3] Wie Sie vielleicht noch aus der Vorlesung wissen, ist dies eine Annahme des Noether-Theorems.

[3] Vergleiche dazu exakte Symmetrietransformationen, für die gilt: $L\Big(\vec{\Phi}^{(s)}(\vec{q}(t)), \frac{d}{dt}\vec{\Phi}^{(s)}(\vec{q}(t))\Big) = L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t))$ für alle s. Man kann leicht sehen, dass eine exakte Symmetrie auch einen Symmetrie erster Ordnung in s ist.

Bemerkung: Wenn Sie Schwierigkeiten mit den Entwicklungen haben und dieses Problem nicht lösen können, so können Sie immer noch Problem b) und c) machen! **(4 Punkte)**

b) *Bestimmen Sie die Erhaltungsgröße, die zu der Transformation (3) gehört.* **(3 Punkte)**

c) Betrachten Sie nun das neue Koordinatensystem

$$x = \lambda^2 - \mu^2,$$
$$y = 2\lambda\mu.$$

Drücken Sie die Lagrangefunktion (2) durch die neuen Koordinaten x und y aus. Diese hat eine zyklische Koordinate. Wie verhält sich die zyklische Koordinate zu der Erhaltungsgröße aus b)? **(3 Punkte)**

Kommentar: Diese Aufgabe zeigt eine Anwendung des Noether-Theorems für etwas Anderes als Translationen oder Rotationen.