Klassische Mechanik

WS 2018/19 — David Gross, Johan Åberg, Markus Heinrich
Probeklausur — Institut für Theoretische Physik, Universität zu Köln

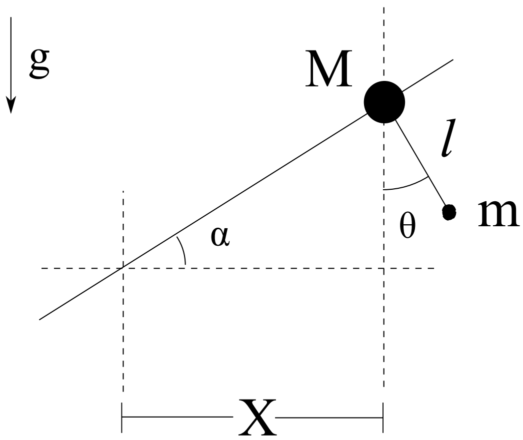
Nützliche Formeln

- **Noether-Theorem**. Die Lagrangefunktion transformiere sich unter $\vec{q}_i \mapsto \vec{q}_i' = \vec{h}_i^\varepsilon(\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_n)$ als $L \mapsto L + \frac{d}{dt} f$. Dann ist
$$J = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}_i} \cdot \frac{\partial \vec{h}_i^\varepsilon}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}$$
erhalten.

- **Poisson-Klammer**
$$\{f, g\} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial p_n} \frac{\partial g}{\partial q_n} - \frac{\partial f}{\partial q_n} \frac{\partial g}{\partial p_n} \right).$$

- Bewegungsgleichung eines Punktteilchens der Masse m in einem **rotierenden Bezugssystem** $\vec{r}'$. Hierbei ist $\vec{R}$ der Ortsvektor, der zum Ursprungs des rotierenden Bezugssystems zeigt, $\vec{\omega}$ der Winkelgeschwindigkeitsvektor der Rotation und $\vec{F}$ eine externe Kraft.
$$m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F} + m\ddot{\vec{R}} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}'.$$

1 Lagrangefunktion und Euler-Lagrange-Gleichungen



Eine Masse M gleite ohne Reibung auf einer geraden Schiene, die einen Winkel α mit der Horizontalen einschließt. An der Masse hängt ein Pendel in Form einer masselosen Stange der Länge l, an deren Ende eine Masse m befestigt ist. Das Pendel könne nur in der Ebene schwingen, die durch die Vertikale und die Schiene aufgespannt ist. Beide Massen M und m unterliegen der Gravitationsbeschleunigung g in der vertikalen Richtung.

a) Es sei X die Position der Masse M entlang der Horizontalen und θ der Winkel, den das Pendel mit der Vertikalen einschließt. *Leiten Sie die Lagrangefunktion in den Koordinaten X und θ her.*

b) *Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen für die Bewegung des Teilchens.*

2 Von Lagrange zu Hamilton und die Hamiltonschen Gleichungen

Betrachten Sie die folgende Lagrangefunktion, die die Bewegung eines Teilchens der Masse m beschreibt:

$$L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{m}{2}(\dot{x} - \omega y)^2 + \frac{m}{2}(\dot{y} + \omega x)^2 + \frac{m}{2}\dot{z}^2.$$

a) *Bestimmen Sie die konjugierten Impulse zu x, y und z.*

b) *Bestimmen Sie die entsprechende Hamiltonfunktion.*

c) *Leiten Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen her.*

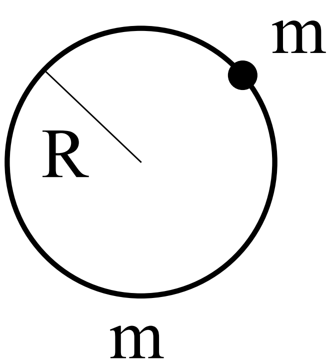
3 Kanonische Transformationen

Betrachten Sie die Abbildung von Koordinaten (q, p) zu (Q, P), gegeben durch

$$Q = \ln\Big(1 + q^\alpha \cos(\beta p)\Big), \quad P = 2\Big(1 + q^\alpha \cos(\beta p)\Big) q^\alpha \sin(\beta p).$$

Für welche Werte von α und β is das eine kanonische Transformation?

4 Trägheitstensor



Betrachten Sie einen unendlich dünnen Ring der Masse m und Radius R. Auf dem Ring sei eine zusätzliche Punktmasse m angebracht (die gesamte Masse ist also $2m$). *Bestimmen Sie den Trägheitstensor im Hauptachsensystem mit Ursprung im Schwerpunkt des Rings.*

Hinweis: Das Trägheitsmoment eines Rings (*d.h. ohne zusätzliche Punktmasse*) bezüglich einer Achse, die *in der Ringebene* liegt und durch das Ringzentrum verläuft, ist $I_{\text{Ebene}} = \frac{1}{2}mR^2$.

5 Phasenraumfluss

Nehmen Sie an, dass sich ein Teilchen der Masse m entlang einer Geraden bewegt und dem Potential $V(x) = \alpha x^2 - \beta x^4$ unterliegt, wobei $\alpha > 0$ und $\beta > 0$.

Skizzieren Sie den Fluss im Phasenraum des Teilchens. Sie müssen kein sehr detailliertes oder genaues Bild erstellen; eine grobe Skizze ist genug! *Zeichnen Sie in dem Bild die Gleichgewichtspunkte ein und bestimmen Sie welche davon stabil und welche instabil sind.*

6 Noether-Theorem

Betrachten Sie ein System mit N Teilchen, gegeben durch die Lagrangefunktion

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} V(\vec{r}_i - \vec{r}_j).$$

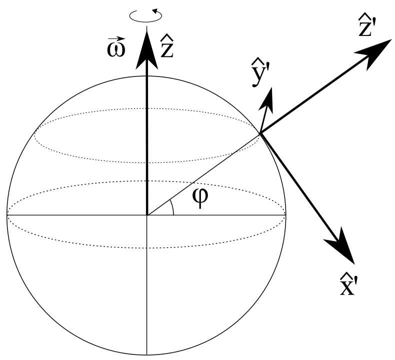
Zeigen Sie, dass das System invariant unter Galilei-Transformationen

$$\vec{r}_i \mapsto \vec{r}_i' = \vec{r}_i + \varepsilon \vec{v} t,$$

ist, wobei $\vec{v}$ ein beliebiger Geschwindigkeitsvektor ist.

Leiten Sie die zugehörige Erhaltungsgröße mittels des Noether-Theorems her. Was ist die physikalische Bedeutung des Erhaltungssatzes?

7 Newton, Äpfel und eine rotierende Erde



Obwohl Newton Äpfel hasst, sitzt er mal wieder neben einem Apfelbaum. Er weiß, dass die Erde sich gerade um sich selbst dreht und fragt sich wie sich dies wohl auf die Trajektorie eines vom Baum fallenden Apfels auswirkt. Betrachten Sie ein rotierendes Koordinatensystem $\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'$ mit Ursprung irgendwo auf der Erdoberfläche mit Breitengrad φ. Wir nehmen an, dass die Achsen so orientiert sind, dass $\hat{z}'$ radial nach außen zeigt (d.h. vertikal nach oben bzgl. der Oberfläche), $\hat{x}'$ zeigt nach Süden und $\hat{y}'$ nach Osten.

a) *Drücken Sie den Winkelgeschwindigkeitsvektor der Erde, $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$, in dem mitrotierenden Bezugssystem aus.*

b) *Leiten Sie die Bewegungsgleichungen und Anfangsbedingungen in dem rotierenden Bezugssystem für einen Apfel her, der aus der Höhe h zu Boden fällt.* Nehmen Sie an, dass die Rotation der Erde relativ langsam ist und Sie so alle Terme der Ordung ω^2 oder höher vernachlässigen können.

c) *Lösen Sie die Gleichungen.* Sie können dabei wieder alle Terme der Ordung ω^2 oder höher ignorieren.

d) *Wie groß ist die horizontale Abweichung (also die in $\hat{y}'$ Richtung), wenn der Apfel auf dem Boden aufkommt, verglichen mit dem geradlinigen Fall?*[1] *Für welchen Winkel φ ist die Abweichung am größten?*

[1] Streng genommen vernachlässigen wie hierbei die Krümmung der Erdoberfläche.