

10. Übung zur Vorlesung “Theoretische Physik in zwei Semestern II”

Abgabe: Montag, den 23.1.2006 bis 12.00 Uhr im Raum 102 des Instituts für Kernphysik

Aufgabe 37: Idealer Paramagnet kanonisch

In dieser Aufgabe soll das in Aufgabe 35 eingeführte Modell eines Paramagneten im kanonischen Formalismus behandelt werden. Für N unabhängige (aber unterscheidbare!) Spins ist die kanonische Zustandssumme

$$Z = Z_1^N, \quad (1)$$

wobei Z_1 die Zustandssumme eines einzelnen Spins bezeichnet. Da jeder Spin nur zwei Mikrozustände (= Einstellmöglichkeiten) mit Energien $\pm E_0$ besitzt, ergibt sich die letztere einfach zu

$$Z_1 = e^{\beta E_0} + e^{-\beta E_0} = 2 \cosh(\beta E_0). \quad (2)$$

- a.) Berechnen Sie aus (1, 2) mittels den in der Vorlesung angegebenen allgemeinen Beziehungen die innere Energie E und die Wärmekapazität C_V des Spinsystems. Skizzieren Sie beide Größen als Funktionen der Temperatur, und interpretieren Sie den Temperaturverlauf. *5 Punkte*
- b.) Bestimmen Sie die Temperaturabhängigkeit von E alternativ aus der mikrokanonischen Rechnung von Aufgabe 35, indem Sie den dort erhaltenen Ausdruck für die Entropie $S(E, N)$ nach E ableiten und die Beziehung

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_N = \frac{1}{T}$$

invertieren. Vergleichen Sie mit Teil a.).

3 Punkte

Aufgabe 38: Verteilungen minimalen Vorurteils

Gegeben sei ein System mit Ω Mikrozuständen $n = 1, 2, 3, \dots, \Omega$ und den zugehörigen Energien E_n . Wie in der Vorlesung gezeigt wurde, kann einer beliebigen Wahrscheinlichkeitsverteilung $P^{(n)}$ über den Mikrozuständen die Entropie

$$S[P^{(n)}] = -k_B \sum_{n=1}^{\Omega} P^{(n)} \ln P^{(n)} \quad (3)$$

zugeordnet werden. E.T. Jaynes¹ hat darauf hingewiesen, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der statistischen Physik die Entropie (3) unter bestimmten Nebenbedingungen maxi-

¹Physical Review **106**, 620 (1957).

mieren. Da der Ausdruck (3) informationstheoretisch als Mass für die mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung $P^{(n)}$ verbundene Unkenntnis (“Ignoranz”) interpretiert werden kann, bedeutet dies, dass die Verteilungen der statistischen Physik *maximal ignorant* bzw. mit *minimalen Vorurteilen behaftet* sind.

- a.) Zeigen Sie zunächst, dass für zwei beliebige normierte Wahrscheinlichkeitsverteilungen $P^{(n)}$ und $\tilde{P}^{(n)}$ die Ungleichung

$$S[P^{(n)}] \leq -k_B \sum_{n=1}^{\Omega} P^{(n)} \ln \tilde{P}^{(n)} \quad (4)$$

gilt. *Hinweis:* Für jedes $x > 0$ ist $\ln x < x - 1$. 2 Punkte

- b.) Zeigen Sie nun unter Benutzung von (4), dass die Gleichverteilung $P^{(n)} = 1/\Omega$ unter allen normierten Verteilungen die maximale Entropie besitzt. Die mikrokanonische Verteilung ist in diesem Sinne maximal ignorant. *Hinweis:* Setzen Sie in (4) $\tilde{P}^{(n)} = 1/\Omega$. 1 Punkt

- c.) Zeigen Sie schliesslich, analog zu Teil b.), dass die kanonische Verteilung $P^{(n)} = Z^{-1} e^{-\beta E_n}$ unter allen Verteilungen mit gleichem Mittelwert $\langle E_n \rangle$ die maximale Entropie besitzt. 2 Punkte

Aufgabe 39: Volumen der Einheitskugel

Der in der Vorlesung angegebene Ausdruck für das Volumen v_d der d -dimensionalen Einheitskugel lässt sich wie folgt ableiten. Das d -dimensionale Gauss'sche Integral

$$I_d = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_d \exp\left[-\sum_{i=1}^d x_i^2\right]$$

kann auf zwei verschiedenen Wegen ausgewertet werden: Einmal schreibt man I_d als Produkt von eindimensionalen Gauss-Integralen und benutzt ein Ergebnis von Aufgabe 9, zum anderen rechnet man mit d -dimensionalen Polarkoordinaten, und erhält

$$I_d = a_d \int_0^{\infty} dr r^{d-1} e^{-r^2}.$$

Hier bezeichnet a_d die *Oberfläche* der d -dimensionalen Einheitskugel, die sich durch Integration über die Winkelvariablen ergibt. Durch Vergleich der beiden Ergebnisse folgt (unter Benutzung der Definition der Γ -Funktion) ein Ausdruck für a_d . Beweisen Sie schliesslich noch die Beziehung $v_d = a_d/d$ zwischen Volumen und Fläche der Einheitskugel. 5 Punkte