

## 11. Übung zur Vorlesung "Theoretische Physik in zwei Semestern II"

---

**Abgabe:** Montag, den 30.1.2006 bis 12.00 Uhr im Raum 102 des Instituts für Kernphysik

### Aufgabe 40: Harmonischer Oszillator im Wärmebad

Wir betrachten einen eindimensionalen quantenmechanischen harmonischen Oszillator, der sich in Kontakt mit einem Wärmereservoir der Temperatur  $T$  befindet. Dies kann z.B. als Modell für den Schwingungsfreiheitsgrad eines zweiatomigen Moleküls dienen. Die Energieeigenwerte des Oszillators sind bekanntlich

$$E_n = \hbar\omega(n + 1/2), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- a.) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme, und bestimmen Sie daraus die mittlere Energie  $E$  des Oszillators als Funktion der Temperatur. Skizzieren Sie den Verlauf.  
*Hinweis:*  $Z$  ist eine geometrische Reihe. 3 Punkte
- b.) Zeigen Sie, dass der klassische Gleichverteilungssatz bei hohen Temperaturen erfüllt ist. Bei welcher Temperatur  $T_{\text{vib}}$  beginnt die Energie wesentlich von der klassischen Vorhersage abzuweichen? Schätzen Sie den Wert von  $T_{\text{vib}}$  ab für das  $\text{H}_2$ -Molekül mit einer Schwingungsfrequenz von  $\omega \approx 8 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}$ . 3 Punkte

### Aufgabe 41: Das chemische Potential des klassischen idealen Gases

In dieser und den folgenden beiden Aufgaben sollen einige Aspekte des chemischen Potentials und des grosskanonischen Formalismus am Beispiel des klassischen idealen Gases illustriert werden.

- a.) Berechnen Sie das chemische Potential  $\mu(T, V, N)$  des klassischen idealen Gase durch Ableitung des in der Vorlesung angegebenen Ausdruck für die freie Energie  $F(T, V, N)$ . Sie sollten erhalten:

$$\mu = -k_{\text{B}}T \ln \left( \frac{V}{N\lambda_{\text{th}}^3} \right). \quad (1)$$

Skizzieren Sie den Verlauf von  $\mu$  als Funktion von  $T$ . 2 Punkte

- b.) Teil a.) zeigt insbesondere, daß das chemische Potential bei hohen Temperaturen (wo die klassische Näherung zutrifft) *negativ* ist. Im Hinblick auf die Identität

$$\mu = \left( \frac{\partial E}{\partial N} \right)_{S, V} \quad (2)$$

ist das zunächst überraschend, denn man würde erwarten, dass die Energie des Gases durch das Hinzufügen von Teilchen *zunimmt*. Allerdings besagt (2), dass die Teilchen bei *konstanter Entropie* hinzugefügt werden sollen, und nicht, wie in der Praxis üblich, bei konstanter Temperatur. Beweisen Sie die allgemeine thermodynamische Beziehung

$$\left(\frac{\partial E}{\partial N}\right)_{T,V} = \left(\frac{\partial E}{\partial N}\right)_{S,V} + T \left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{T,V},$$

zwischen den Ableitungen bei konstanter Entropie und konstanter Temperatur, und zeigen Sie, dass für das ideale Gas  $(\partial E/\partial N)_{T,V} > 0$ . 3 Punkte

#### Aufgabe 42: Teilchenzahlfluktuationen im klassischen idealen Gas

Bestimmen Sie das grosskanonische Potential  $J(T, V, \mu)$  für das klassische ideale Gas, indem Sie den Ausdruck (1) nach  $N$  auflösen und die Beziehung  $J = -PV$  benutzen. Berechnen Sie nun aus  $J$  mittels der Beziehung  $J = -k_B T \ln Y$  die Varianz der Teilchenzahl des idealen Gases. Wie gross ist das Verhältnis der Varianz zum Mittelwert  $N$ ? 3 Punkte

#### Aufgabe 43: Die barometrische Höhenformel

Setzt man das ideale Gas einem äusseren Potential  $V(\vec{r})$  aus, so wird auch das chemische Potential ortsabhängig, und im thermischen Gleichgewicht gilt

$$\mu(\vec{r}) + V(\vec{r}) = \text{const.} \tag{3}$$

Bei konstanter Temperatur äussert sich dies in einer räumlich variablen Teilchenzahldichte  $n(\vec{r})$ , die die globale Teilchenzahldichte  $N/V$  in (1) ersetzt. Betrachten Sie speziell das Gravitationspotential  $V(z) = mgz$  und zeigen Sie, dass in diesem Fall aus der Gleichgewichtsbedingung (3) die barometrische Höhenformel für die isotherme Atmosphäre folgt.

3 Punkte