UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Prof. Dr. Joachim Krug
Dr. Vladislav Popkov
Institut für Theoretische Physik
Wintersemester 2005/2006

2. Übung zur Vorlesung "Theoretische Physik in zwei Semestern II"

Abgabe: Montag, den 7.11..2005 bis 12.00 Uhr im Raum 102 des Instituts für Kernphysik

Aufgabe 5: Wahrscheinlichkeitsstrom und Kontinuitätsgleichung

a.) In der Vorlesung wurde die Kontinuitätsgleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichte ρ_ψ aus der Schrödinger-Gleichung für ein freies Teilchen abgeleitet. Erweitern Sie die Herleitung auf die Schrödinger-Gleichung mit einem allgemeinen Potential $V(\vec{r})$. Gilt die Kontinuitätsgleichung auch, wenn das Potential komplex ist? *2 Punkte*

b.) Berechnen Sie den Wahrscheinlichkeitsstrom $\vec{J}_\psi$ für den Fall, dass ψ eine ebene Welle mit Wellenvektor $\vec{k}$ ist, und interpretieren Sie das Ergebnis. *2 Punkte*

Aufgabe 6: Bewegtes Wellenpaket

Gegeben sei eine Lösung der freien Schrödinger-Gleichung von der Form

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\ A(k) e^{i[kx - \omega(k)t]} \tag{1}$$

mit $\omega(k) = \hbar k^2/2m$. Wir verschieben nun die Amplitudenfunktion $A(k)$ um eine konstante Wellenzahl k_0, d.h. wir ersetzen $A(k)$ in (1) durch $A^{(k_0)}(k) = A(k-k_0)$, und bezeichnen das so definierte neue Wellenpaket mit $\psi^{(k_0)}(x,t)$. Zeigen Sie mittels einer geeigneten Substitution, dass

$$|\psi^{(k_0)}(x,t)|^2 = |\psi(x - (\hbar k_0/m)t, t)|^2,$$

d.h. das neue Wellenpaket bewegt sich relativ zum alten mit der Geschwindigkeit $\hbar k_0/m$. *2 Punkte*

Aufgabe 7: Teilchen im eindimensionalen Kastenpotential

Die Eigenfunktionen $u_n(x)$ der stationären Schrödinger-Gleichung für ein Teilchen in einem eindimensionalen Kasten mit unendlich hohen Wänden bei $x = \pm a/2$ sind

$$u_n(x) = \sqrt{2/a}\ \cos(n\pi x/a) \quad n = 1,3,5,..., \qquad u_n(x) = \sqrt{2/a}\ \sin(n\pi x/a) \quad n = 2,4,6,...$$

mit den zugehörigen Energie-Eigenwerten

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2ma^2}.$$

a.) Die Wellenfunktion des Teilchens sei gegeben durch[1] $u_n(x)$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hält sich das Teilchen dann im mittleren Bereich $-a/4 < x < a/4$ des Kastens auf? Wie hängt diese Wahrscheinlichkeit von n ab? Vergleichen Sie das Ergebnis mit einem klassischen Teilchen, dessen Aufenthaltsort über einen langen Zeitraum (gross gegenüber der Laufzeit durch den Kasten) gemittelt wird. *4 Punkte*

[1] Später werden wir sagen, dass das Teilchen *sich im n-ten Energie-Eigenzustand befindet.*

b.) Berechnen Sie die Ortsunschärfe Δx des Teilchens. Diskutieren Sie auch hier die Abhängigkeit von n, und vergleichen Sie den Grenzfall $n \to \infty$ mit dem Verhalten des klassischen Teilchens.
Hinweis: Die Stammfunktion von $y^2 \cos^2(y)$ ist $\frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{4}y\cos(2y) - \frac{1-2y^2}{8}\sin(2y)$. *5 Punkte*

c.) Die Impulsunschärfe ergibt sich am einfachsten aus der Beobachtung, dass die kinetische Energie des Teilchens gleich E_n sein muss (das Potential ist im Kasten ja gleich Null) und sein mittlerer Impuls verschwindet, sodass $(\Delta p)^2 = \langle p^2 \rangle = 2mE_n$. Bilden Sie mit dem Ergebnis von Teil b.) das Unschärfeprodukt $\Delta x \cdot \Delta p$ und zeigen Sie, dass für alle n gilt $\Delta x \cdot \Delta p > \hbar/2$. *1 Punkt*

Aufgabe 8: Eigenschaften der Fourier-Transformation

Zur eindimensionalen Wellenfunktion $\psi(x)$ gehört die Fourier-Amplitude

$$A(k) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \psi(x) e^{-ikx}.$$

Beweisen Sie (unter der Voraussetzung, dass alle Integrale existieren) die folgenden Identitäten:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk\ |A(k)|^2 = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} dx\ |\psi(x)|^2, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dk\ k^2 |A(k)|^2 = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} dx\ |d\psi(x)/dx|^2$$

2 Punkte

Aufgabe 9: Gauss'sche Integrale

In der Vorlesung benötigen wir oft Integrale der Form

$$I_n(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ x^n e^{-ax^2+bx}$$

mit $n = 0, 1, 2$; im folgenden seien a, b reell und $a > 0$.

a.) Wir drücken zunächst $I_0(a,0)$ durch ein zweidimensionales Integral aus,

$$I_0(a,0) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\ e^{-a(x^2+y^2)} \right)^{1/2}.$$

Berechnen Sie das zweidimensionale Integral durch eine Transformation auf Radialkoordinaten. *2 Punkte*

b.) Führen Sie nun durch die Substitution $x \to y = x - b/2a$ das Integral $I_0(a,b)$ auf $I_0(a,0)$ zurück. *1 Punkt*

c.) Bestimmen Sie schliesslich $I_1(a,b)$ und $I_2(a,b)$ durch Ableitung von $I_0(a,b)$ nach b bzw. a, und berechnen Sie Mittelwert und Varianz der durch

$$P(x) = (I_0(a,b))^{-1} e^{-ax^2+bx}$$

definierten allgemeinen Gauss'schen Wahrscheinlichkeitsverteilung. *3 Punkte*