UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Prof. Dr. Joachim Krug
Dr. Vladislav Popkov
Institut für Theoretische Physik
Wintersemester 2005/2006

3. Übung zur Vorlesung "Theoretische Physik in zwei Semestern II"

Abgabe: Montag, den 14.11.2005 bis 12:00 Uhr im Raum 102 des Instituts für Kernphysik

Aufgabe 10: Dynamik des Teilchens im Kasten

Wir betrachten nochmals ein Teilchen im Kasten wie in Aufgabe 7. Hier soll seine Bewegung untersucht werden.

Nehmen Sie dabei an, dass sich das Teilchen zur Zeit $t = 0$ in einer Superposition des Grundzustands und des ersten angeregten Zustands befindet,

$$\psi(x, 0) = \alpha u_1(x) + \beta u_2(x).$$

Die Normierungsbedingung $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ sei erfüllt.

Berechnen Sie zunächst die zeitabhängige Lösung der Schrödinger-Gleichung $\psi(x, t)$ und dann den zeitabhängigen Erwartungswert des Ortes

$$x(t) = \langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle.$$

5 Punkte

Aufgabe 11: Beweis der Schwarz'schen Ungleichung

Die in der Vorlesung eingeführte Schwarz'sche Ungleichung

$$|\langle\psi|\phi\rangle|^2 \leq \langle\phi|\phi\rangle\langle\psi|\psi\rangle$$

für zwei beliebige Zustände ϕ und ψ soll hier bewiesen werden.

Betrachten Sie dazu die Überlagerung $\chi = \phi + \alpha\psi$ und nutzen Sie aus, dass $\langle\chi|\chi\rangle \geq 0$ für alle Koeffizienten $\alpha \in \mathbb{C}$.

3 Punkte.

Aufgabe 12: Orthogonalität von Eigenzuständen

ϕ_1 und ϕ_2 seien Eigenzustände des hermiteschen Operators $\hat{A}$ mit Eigenwerten a_1 und a_2, $a_1 \neq a_2$. Zeigen Sie, dass ϕ_1 und ϕ_2 dann orthogonal sein müssen, dass also $\langle\phi_1|\phi_2\rangle = 0$.

Hinweis: Betrachten Sie das Skalarprodukt $\langle\phi_1|\hat{A}|\phi_2\rangle$.

2 Punkte

Aufgabe 13: Zeitentwicklung von Erwartungswerten

Zeigen Sie, dass der Erwartungswert $\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$ eines Operators $\hat{A}$ im Zustand ψ die Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt}\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle\psi|[\hat{\mathcal{H}},\hat{A}]|\psi\rangle \tag{1}$$

erfüllt, wobei $\hat{\mathcal{H}}$ der Hamilton-Operator des Systems ist. Benutzen Sie zur Herleitung die Schrödinger-Gleichung in der allgemeinen Form

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \hat{\mathcal{H}}\psi.$$

Bemerkung: Aus (1) folgt, dass die Erwartungswerte von Operatoren, die mit dem Hamilton-Operator kommutieren, zeitlich konstant sind. Solche Operatoren stellen deshalb *Erhaltungsgrößen* des Systems dar.

3 Punkte

Aufgabe 14: Das Ehrenfest'sche Theorem

Als Anwendung von Aufgabe 13 soll hier die Ehrenfest'sche Gleichung[a] für den Speziallfall eines Teilchens in einer Dimension hergeleitet werden. Sie lautet

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{x}\rangle = \frac{1}{m}\langle\hat{p}\rangle \tag{2}$$

d.h. der Erwartungswert der Teilchengeschwindigkeit ist gleich dem Erwartungswert des Impulses dividiert durch die Masse, wie man es von der klassischen Mechanik her erwarten würde.

Setzen Sie zum Beweis von (2) den Hamilton-Operator

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x)$$

eines Teilchens im Potential $V(x)$ auf der rechten Seite von (1) ein und führen Sie den dabei auftretenden Kommutator $[\hat{p}^2,\hat{x}]$ auf die kanonische Vertauschungsrelation $[\hat{x},\hat{p}] = i\hbar$ zurück.

3 Punkte

[a]Nach Paul Ehrenfest, 1880 - 1933