UNIVERSITÄT ZU KÖLN

4. Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik in zwei Semestern II
Prof. Dr. Joachim Krug, Dr. Vladislav Popkov
Institut für Theoretische Physik
Wintersemester 2005/2006

Abgabe:Montag, den 21.11.2005 bis 12.00 Uhr im Raum 102 des Instituts für Kernphysik

Aufgabe 15: Streuung an der Potentialstufe
Wir betrachten wieder eine endliche Potentialstufe der Höhe V_0 bei $x = 0$, wie in der Vorlesung, diesmal aber für eine Teilchenenergie $E \geq V_0$. Die Wellenfunktion für $x \leq 0$ hat die Form

$$Ae^{ikx} + Be^{-ikx},\ k^2 = 2mE/\hbar^2.$$

Für $x > 0$ gibt es nur eine auslaufende Welle:

$$Ce^{ik'x},\ k'^2 = 2m(E - V_0)/\hbar^2.$$

(a) Zeigen Sie, dass der Transmissionskoeffizient T auf Grund des Wahrscheinlichkeitsströmes gegeben ist durch

$$T = (k' |C|^2)/(k |A|^2)$$

und berechnen Sie diese indem Sie die Stetigkeit der Wellenfunktion und deren Ableitung an der Stelle $x = 0$ ausnutzen.
(b) Berechnen Sie auch den Reflektionskoeffizient $R = |B|^2 / |A|^2$ und stellen Sie sicher dass $R + T = 1$ gilt, wie man es auf Grund der Wahrscheinlichkeitserhaltung erwarten würde.
(3 Punkte.)

Aufgabe 16: Tunneleffekt
Wir betrachten hier eine endliche Potentialbarriere der Höhe V_0 lokalisiert bei $0 \leq x \leq l$ und eine Teilchenergie $E \leq V_0$. Wie in der Vorlesung besprochen

sieht die Wellenfunktion folgendermaßen aus:

$$\begin{array}{rcl} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & x \leq 0 & k^2 = 2mE/\hbar^2 \\ ae^{\kappa x} + be^{-\kappa x} & 0 \leq x \leq l & \kappa^2 = 2m(V_0 - E)/\hbar^2 \\ Ce^{ikx} & x \geq l & k^2 = 2mE/\hbar^2 \end{array}$$

Der Reflektionskoeffizient ist deshalb $R = |B|^2 / |A|^2$ und der Transmissionskoeffizient ist $T = |C|^2 / |A|^2$. Berechnen Sie diese Größen explizit durch die Stetigkeit der Wellenfunktion und deren Ableitung an den Stellen $x = 0$ und $x = l$ auszunutzen.
(5 Punkte.)

Aufgabe 17: Kommutatorrechnung
Es seien $\hat{A}$, $\hat{B}$ und $\hat{C}$ drei beliebige Operatoren.
(a) Zeigen Sie $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}$.
(b) Zeigen Sie $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]$.
(c) Nutzen Sie diese Formeln, um die Jacobi-Identität

$$[\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]] + [\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]] + [\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$$

her zu leiten.
(3 Punkte.)

Aufgabe 18: Das Ehrenfest'sche Theorem II
(a) Beweisen Sie für beliebige Funktionen $f(x)$ des Ortsoperators $\hat{x}$ die Vertauschungsrelation

$$[f(\hat{x}), \hat{p}] = i\hbar \frac{df}{dx}(\hat{x}).$$

Die kanonische Vertauschungsrelation $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ entspricht dem Spezialfall $f(x) = x$, und der Beweis verläuft völlig analog zu diesem Fall.
(b) Beweisen Sie mit Hilfe von (a) die 2. Ehrenfest'sche Gleichung

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{p} \rangle = - \left\langle \frac{dV}{dx} \right\rangle .$$

Sie zeigt, zusammen mit der in Aufgabe 14 bewiesenen ersten Geichung, dass der Schwerpunkt eines Wellenpakets sich wie ein klassisches Teilchen unter dem Einfluß der *mittleren* Kraft $\langle -dV/dx \rangle$ bewegt.
(3 Punkte.)